

MÉTODOS MATEMÁTICOS
PARA LA INGENIERÍA QUÍMICA

NOTAS DE CLASE

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIERÍA DEL DISEÑO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Índice general

1. Interpolación	4
1.1. Introducción	4
1.1.1. Varios problemas prácticos	5
1.2. Interpolación lineal	7
1.3. Polinomio interpolador de Lagrange	9
1.4. Polinomio interpolador de Newton	13
1.5. Caso particular de nodos igualmente espaciados	15
1.5.1. Diferencias finitas	15
1.5.2. Polinomio interpolador de Newton para puntos igualmente espaciados	16
1.6. Interpolación inversa y extrapolación	17
1.6.1. Interpolación inversa	17
1.6.2. Extrapolación	17
1.7. Splines	18
1.8. Ejercicios	23
2. Ajuste de curvas	26
2.1. Recta de mínimos cuadrados	27
2.2. Parábola de mínimos cuadrados	30
2.3. Ajuste no lineal	31
2.4. Ejercicios	34
3. Resolución de ecuaciones no lineales	37

3.1. Ecuaciones no lineales	37
3.1.1. Método de la bisección	37
3.1.2. Método del punto fijo	38
3.1.3. Método de Newton-Raphson	40
3.1.4. Método de la secante	41
3.2. Sistemas de ecuaciones no lineales	42
3.2.1. Método iterativo del punto fijo	42
3.2.2. Método de Newton-Raphson	43
3.2.3. Método de Broyden	47
3.3. Ejercicios	48
4. Sistemas dinámicos lineales	50
4.1. Introducción	50
4.2. Sistema dinámico lineal invariante en tiempo continuo	51
4.2.1. Sistemas representados por una ecuación diferencial de orden n	53
4.3. Estudio de la solución de un sistema continuo	56
4.3.1. Método matricial	56
4.3.2. Método de la Transformada de Laplace. Función paso de Heaviside	57
4.4. Función de transferencia: ceros y polos	65
4.4.1. Ceros y polos	67
4.5. Estabilidad de sistemas continuos	68
4.5.1. Estabilidad asintótica a cero	68
4.6. Criterio de Routh-Hurwitz	71
4.7. Sistemas en lazo cerrado. Realimentación	73
4.8. Ejercicios	77
5. Ecuaciones en diferencias	81
5.1. Estudio de una columna de extracción de pisos	87
5.2. Ejercicios	89

Capítulo 1

Interpolación

1.1. Introducción

Frecuentemente, al realizar trabajos experimentales, la información respecto de cierta función desconocida o de difícil cálculo, $f(x)$, se tiene a partir de una tabla con valores numéricos de $f(x)$ para ciertos valores de x . Para una función representada de esta forma se necesita, a menudo, hallar el valor de $f(x)$ para un valor de x entre dos de los valores tabulados. Éste es el problema de la *interpolación directa*. De forma recíproca, podemos necesitar obtener el valor de x a partir de un valor de $f(x)$ situado entre dos valores tabulados. Éste es el problema de la *interpolación inversa*. El problema de determinar el valor de $f(x)$ en algún punto x que no esté situado entre dos valores de la tabla se denomina *problema de extrapolación*.

Trabajar sólo con la información de $f(x)$ que proporciona la tabla significa desconocer “casi todo” sobre $f(x)$, en particular si $f(x)$ es continua y derivable. En el desarrollo del tema se asumirá la hipótesis de continuidad y derivabilidad sobre la función $f(x)$. Una justificación para esto es que intentaremos resolver los problemas de interpolación y extrapolación aproximando la función “desconocida”, $f(x)$, mediante una función polinómica o una función construida a partir de polinomios (splines).

La interpolación, con las hipótesis descritas es un procedimiento usualmente satisfactorio, sobre todo si los valores para los que se quiere calcular $f(x)$ están cerca de los valores tabulados.

Veamos a continuación algunos problemas prácticos que se pueden plantear.

1.1.1. Varios problemas prácticos

- La fertilización nitrogenada se ha realizado durante muchos años de forma indiscriminada debido en parte al bajo coste de los fertilizantes químicos y a la creencia de que una mayor fertilización implica una mayor producción. El aumento del coste, la evidencia de un óptimo en la dosis de N para una producción máxima y la constatación de que la contaminación por nitrato aumenta con la dosis de abonado nitrogenado, deberían conducir a una práctica más racional del abonado nitrogenado.

Los datos proporcionados corresponden a una experiencia con maíz y muestran la relación entre fertilización (kg Nfert/ha), el contenido de nitrógeno en suelo y en la planta (kg N/ha), y la producción (tm/ha).

Tabla 1.1.-

Nfertilizante aplicado (kg N/ha)	N en planta (Kg/ha)	N en suelo (Kg/ha)	Producción (t/ha)
0	20	15	1.2
110	120	20	6.5
230	220	110	9.3
350	230	230	9.0
460	235	340	8.5
570	210	560	8.0

Por otra parte las dosis óptimas de N dependen del manejo del agua. En la experiencia anterior también se midió la lixiviación (lavado hacia capas más profundas del suelo) de nitrato en función de la dosis de fertilizante nitrogenado y del volumen de drenaje:

Tabla 1.2.-

Nfertilizante aplicado (kg N/ha)	Lixiviación de nitrato (kg N/ha)		
	drenaje alto	drenaje medio	drenaje bajo
0	38	25	18
95	42	30	19
180	60	40	21
360	138	95	50

- En la siguiente tabla se muestra el cálculo de la extracción diaria de nitrógeno en el cultivo de cítricos a partir de los datos conocidos de las necesidades mensuales

Tabla 1.3.-

Meses	Nextraído kgN/ha	extraccione mensuales/totales	Fracción total de N extraído	Fracción del año
1	2.44	0.012	0.012	0.083
2	4.07	0.02	0.032	0.166
3	6.11	0.03	0.062	0.25
4	12.22	0.06	0.122	0.333
5	23.21	0.114	0.236	0.416
6	34.61	0.17	0.406	0.5
7	42.75	0.21	0.616	0.583
8	36.65	0.18	0.796	0.666
9	22.39	0.11	0.906	0.75
10	10.18	0.05	0.956	0.833
11	6.11	0.03	0.986	0.916
12	2.85	0.014	1.000	1.000

- Veamos ahora la curva de demanda de N por el cultivo como una función de la fracción del tiempo.

Debido a los problemas que supone la ingestión de aguas con un elevado contenido en nitratos por parte del ser humano (la OMS propone que en agua potable no se sobrepase los 50 ppm), y puesto que parece que en la contaminación de los acuíferos tiene una importancia crucial el exceso de la fertilización nitrogenada aportada por la agricultura intensiva, se realizó un ensayo de laboratorio con vistas a considerar la evolución de mineralización, proceso por el cual el N orgánico (proveniente de residuos vegetales, abonos ...) se transforma en N mineral (NO₃⁻ y NH₄⁺), que se produce en el suelo de una parcela de Vinalesa con vistas a considerar estos aportes en el balance total de N y así al considerar este aporte disminuir la fertilización disminuyendo de esta forma la contaminación de los acuíferos. Los datos obtenidos para un ensayo a 25 grados C y a la humedad determinada fueron los siguientes:

Tabla 1.4.-

Tiempo (días)	Nmin (mg/kg)
7	9.466
14	8.211
27	15.590
41	17.615
55	20.215
83	21.734

Según la bibliografía la evolución de la mineralización se ha ajustado a funciones lineales ($Nmin = N0 + kt$), exponenciales de primer orden ($Nmin = N0(1 - \exp(-kt))$), potenciales ($Nmin = ht^k$).

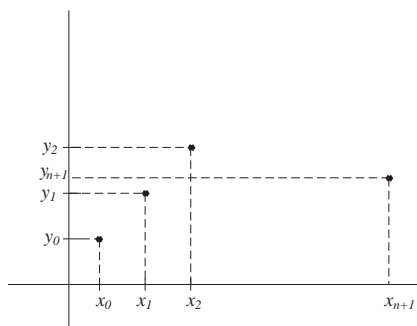
1.2. Interpolación lineal

Supongamos que se tiene una tabla de datos

Tabla 1.5.-

x_0	x_1	x_{n+1}
y_0	y_1	y_{n+1}

que gráficamente se pueden representar, por ejemplo, de la forma



Pretendemos conocer el valor que toma la variable y para un valor de x que no está recogido en la tabla. Por ejemplo, sea $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Para

aproximar el valor de y se supone que se encuentra en la recta que une los puntos (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) . Esta recta tiene por ecuación

$$\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i},$$

o sea, el valor de y correspondiente al valor x es

$$y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) = y_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (1.1)$$

Podemos escribir una función interpoladora, $I(x)$, que sea válida para todos los puntos comprendidos entre los puntos extremos de la tabla haciendo uso de la función característica,

$$\chi_{[x_i, x_{i+1}]} = \begin{cases} 1 & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \notin [x_i, x_{i+1}] \end{cases}.$$

De este modo, para los puntos de la tabla 1.5 se puede escribir

$$\begin{aligned} I(x) &= \left(y_0 \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \chi_{[x_0, x_1]} + \\ &+ \left(y_1 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \chi_{[x_1, x_2]} + \\ &\vdots \\ &+ \left(y_n \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n} + y_{n+1} \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} \right) \chi_{[x_n, x_{n+1}]} . \end{aligned}$$

Introduciendo las funciones

$$\psi_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \chi_{[x_{i-1}, x_i]} + \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \chi_{[x_i, x_{i+1}]},$$

podemos escribir

$$I(x) = y_0 \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \chi_{[x_0, x_1]} + \sum_{i=1}^n y_i \psi_i(x) + y_{n+1} \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} \chi_{[x_n, x_{n+1}]}, \quad (1.2)$$

que es el interpolante lineal asociado a la tabla 1.5.

1.3. Polinomio interpolador de Lagrange

Supongamos conocidos los valores de una función $f(x)$ en $n + 1$ puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_n , que supondremos ordenados de menor a mayor. Esta información la representamos en la siguiente tabla:

Tabla 1.6.- Tabla de simple entrada para la función f .

x	x_0	x_1	\dots	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	\dots	f_n

Nuestro problema es obtener, aproximadamente, el valor de $f(x)$ en un punto arbitrario $x \in [x_0, x_n]$. Para resolverlo, construiremos un polinomio $L_n(x)$ de grado menor o igual que n que cumpla que

$$L_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

es decir, que en los puntos x_i toma los valores de la tabla. A $L_n(x)$ se le denomina *polinomio interpolador* de la función $f(x)$ en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n que, a su vez, se llaman *nodos de interpolación* de la función f . Una posible forma de resolver el problema sería el plantear un polinomio de grado n

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

con coeficientes $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ indeterminados tal que $P_n(x_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, n$. Esto significa que obtener el polinomio interpolador es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n &= f_1, \\ a_0 + a_1x_2 + \dots + a_nx_2^n &= f_2, \\ &\vdots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n &= f_n. \end{aligned}$$

Esta forma de afrontar el problema es, desde el punto de vista práctico, poco operativa.

El siguiente resultado proporciona una forma explícita del polinomio interpolador buscado.

Teorema 1 (Polinomio interpolador de Lagrange) *Dada la tabla 1.6, se considera el polinomio*

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n P_{n,i}(x) f_i$$

donde

$$P_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)},$$

con $i = 0, 1, \dots, n$. Este polinomio es un polinomio interpolador para la función $f(x)$.

Demostración.

En primer lugar, el polinomio $L_n(x)$ tiene grado menor o igual que n puesto que es combinación lineal de los polinomios $P_{n,i}(x)$, y éstos tienen grado menor o igual que n . Por otra parte, observemos que

$$P_{n,i}(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases},$$

de donde

$$L_n(x_i) = P_{n,i}(x_i) f_i = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

El polinomio obtenido en el teorema 1 se conoce con el nombre de polinomio interpolador de Lagrange. Sería más propio decir que está representado en la forma de Lagrange ya que, como probaremos en la siguiente proposición, el polinomio interpolador de una función $f(x)$ es único.

Proposición 1.1 *Dada la tabla 1.6, el polinomio interpolador de la función $f(x)$ es único.*

Demostración.

Supongamos que existe otro polinomio interpolador de $f(x)$, es decir, existe un polinomio $L_n^*(x)$ de grado menor o igual que n , tal que

$$L_n^*(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Consideramos el polinomio $Q_n(x) = L_n(x) - L_n^*(x)$ el cual tendrá, a lo sumo, grado n . Este polinomio verifica

$$Q_n(x_i) = L_n(x_i) - L_n^*(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Por lo tanto $Q_n(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que n con $n + 1$ raíces distintas, de donde $Q_n(x)$ es el polinomio idénticamente nulo. En consecuencia $L_n(x) = L_n^*(x)$.

Nota 1.1

- Hay otras formas de escribir el polinomio interpolador de una función $f(x)$ en $n + 1$ puntos. No obstante, hay que recordar que la única diferencia será de aspecto puesto que el polinomio interpolador es único.
- Si se sabe que la función $f(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que n , $L_n(x) = f(x)$.
- Para el cálculo práctico del polinomio interpolador de Lagrange no hay necesidad alguna de que los nodos estén ordenados.
- En vista de que un polinomio interpolador depende linealmente de los valores f_i de la función f , el polinomio interpolador de la suma de dos funciones en $n + 1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_n es igual a la suma de los polinomios interpoladores.

Ejemplo 1.1 Consideremos los datos dados por la tabla

x	0,3	1	2	3
$f(x)$	1,35	2,718	7,389	20,086

que corresponde a algunos valores que toma la función $f(x) = e^x$. El polinomio interpolador, en la forma de Lagrange, viene dado por

$$\begin{aligned}
 L_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0,3-1)(0,3-2)(0,3-3)}1,35 + \\
 &+ \frac{(x-0,3)(x-2)(x-3)}{(1-0,3)(1-2)(1-3)}2,718 + \\
 &+ \frac{(x-0,3)(x-1)(x-3)}{(2-0,3)(2-1)(2-3)}7,389 + \\
 &+ \frac{(x-0,3)(x-1)(x-2)}{(3-0,3)(3-1)(3-2)}20,086 .
 \end{aligned}$$

Para obtener, por ejemplo, una aproximación al valor de $f(0,44)$, calculamos $L_3(0,44) = 1,608$. El valor exacto de $f(x)$ es 1,553. Observamos las gráficas, superpuestas, de e^x y $L_3(x)$ en la figura 1.1.

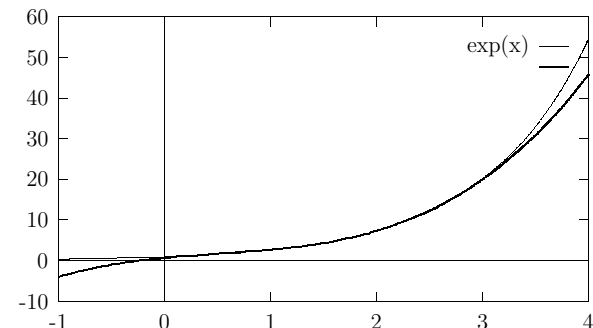


Fig. 1.1.- Gráficas de e^x y $L_3(x)$.

En el siguiente ejemplo se puede observar que el polinomio interpolador no siempre proporciona buenos resultados.

Ejemplo 1.2 Consideramos la tabla

x	0	3	5	9
$f(x)$	0	0,141	-0,959	0,412

correspondiente a algunos valores de la función $f(x) = \sin(x)$. Si calculamos el polinomio interpolador en la forma de Lagrange, obtenemos

$$\begin{aligned}
 L_3(x) &= \frac{(x-3)(x-5)(x-9)}{(0-3)(0-5)(0-9)}0 + \frac{(x-0)(x-5)(x-9)}{(3-0)(3-5)(3-9)}0,141 + \\
 &+ \frac{(x-0)(x-3)(x-9)}{(5-0)(5-3)(5-9)}(-0,959) + \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(9-0)(9-3)(9-5)}0,412.
 \end{aligned}$$

De la observación de las gráficas de $\sin(x)$ y de $L_3(x)$ (véase la figura 1.2) se deducen las grandes diferencias entre la función aproximadora ($L_3(x)$) y la función a aproximar ($\sin(x)$).

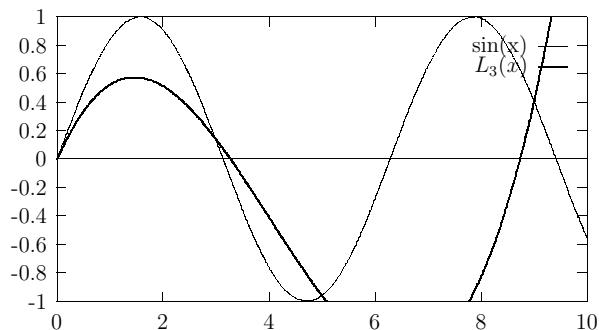


Fig. 1.2.- Gráficas de $\sin(x)$ y $L_3(x)$.

1.4. Polinomio interpolador de Newton

A partir de los datos de la Tabla 1.5, vamos a obtener una nueva forma de expresar el polinomio interpolador para la función $f(x)$. Antes será interesante demostrar el siguiente resultado.

Proposición 1.2 Sea f una función de la cual se conocen sus valores en $n + 2$ valores reales distintos

$$f(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1.$$

Consideremos los polinomios interpoladores de f en los nodos x_0, x_1, \dots, x_n y $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ a los cuales llamamos $L_n(x)$ y $L_{n+1}(x)$ respectivamente. Entonces, existe una constante $c_n \neq 0$ tal que

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) + c_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Demostración. Observemos que el polinomio

$$L_n(x) + c_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

coincide con $L_n(x)$, y por lo tanto con $f(x)$ en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n , para cualquier valor de c_n . Además, este polinomio es de grado $n + 1$ a lo sumo.

Elegiremos c_n de forma que

$$f_{n+1} = L_n(x_{n+1}) + c_n(x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1) \cdots (x_{n+1} - x_n),$$

de modo que

$$c_n = \frac{f_{n+1} - L_n(x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1) \cdots (x_{n+1} - x_n)}.$$

Vamos a construir, de forma recursiva, un polinomio interpolador para la función f en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n .

1. Definimos $N_0(x) = f_0$.
2. Teniendo en cuenta la demostración de la proposición 1.2 definimos

$$N_1(x) = N_0(x) + c_1(x - x_0), \quad \text{con } c_1 = \frac{f_1 - N_0(x_1)}{(x_1 - x_0)}.$$

3. En general, calculamos

$$N_k(x) = N_0(x) + \sum_{i=1}^k c_i(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})$$

con

$$c_i = \frac{f_i - N_{i-1}(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})}.$$

para $k = 2, 3, \dots, n$.

Llamaremos polinomio interpolador en la forma de Newton al polinomio

$$N_n(x) = N_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}),$$

que se construye mediante el proceso recursivo descrito. Notar que

$$N_{k+1}(x) = N_k(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}).$$

Evidentemente $L_n(x) = N_n(x)$ aunque la forma de Newton permite aprovechar la información que se tiene al añadirse un nuevo nodo de interpolación.

1.5. Caso particular de nodos igualmente espaciados

1.5.1. Diferencias finitas

En muchos casos los nodos de interpolación pueden aparecer equidistantes entre sí o igualmente espaciados, es decir,

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Sea $h \in \mathbb{R}$ constante y una función real $f(x)$. Llamaremos *diferencia de orden 1* de la función f , y se representa por $\Delta f(x)$, a la siguiente expresión

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

Las diferencias de órdenes superiores se definen de forma recursiva:

$$\Delta^{k+1}f(x) = \Delta(\Delta^k f(x)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Por convenio se considerará $\Delta^0 f(x) = f(x)$. Las diferencias sucesivas de una función $f(x)$ se pueden representar y calcular de forma sencilla mediante la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
x_0	f_0	$\Delta f(x_0)$			
x_1	f_1	$\Delta f(x_1)$	$\Delta^2 f(x_0)$	$\Delta^3 f(x_0)$	
x_2	f_2	$\Delta f(x_2)$	$\Delta^2 f(x_1)$	$\Delta^3 f(x_1)$	$\Delta^4 f(x_0)$
x_3	f_3	$\Delta f(x_3)$	$\Delta^2 f(x_2)$	\vdots	\vdots
x_4	f_4	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

Ejemplo 1.3 Si calculamos la tabla de diferencias sucesivas correspondiente a la tabla de valores

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	1,65	1,03	0,74	0,61	0,53	0,45

obtenemos

x_i	f_i	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0,5	1,65					
1	1,03	-0,62	0,33			
1,5	0,74	-0,29	0,16	-0,17	0,06	
2	0,61	-0,13	0,05	-0,11	0,06	0,00
2,5	0,53	-0,08	0,00	-0,05		
3	0,45	-0,08				

1.5.2. Polinomio interpolador de Newton para puntos igualmente espaciados

Si en la forma de Newton del polinomio interpolador suponemos que los puntos están igualmente espaciados, es decir

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

se obtiene

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{h} \\ c_2 &= \frac{f(x_2) - f(x_0) - c_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \\ &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{\Delta f(x_0)}{h}}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_0)}{2h} - \frac{\Delta f(x_0)}{h}}{h} = \\ &= \frac{\Delta f(x_1) + \Delta f(x_0) - 2\Delta f(x_0)}{2h^2} = \frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}. \end{aligned}$$

En general, se obtiene por inducción

$$c_k = \frac{\Delta^k f(x_0)}{h^k k!},$$

de donde la forma de Newton del polinomio interpolador quedaría del siguiente modo

$$N_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2 2!}(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Nótese que los coeficientes c_i , $i = 1, 2, \dots, n$ se obtienen, de forma sencilla, a partir de la tabla de diferencias sucesivas de la función.

Ejemplo 1.4 Dada la tabla de datos y los elementos subrayados de la tabla de diferencias ($\Delta^k f(x_0)$) del ejemplo 1.3, se construye muy fácilmente el polinomio interpolador en la forma de Newton

$$N_5(x) = 1,65 + \frac{(-0,62)}{0,5}(x - 0,5) + \frac{0,33}{0,5^2 2!}(x - 0,5)(x - 1) + \\ + \frac{(-0,17)}{0,5^3 3!}(x - 0,5)(x - 1)(x - 1,5) + \\ + \frac{0,06}{0,5^4 4!}(x - 0,5)(x - 1)(x - 1,5)(x - 2).$$

1.6. Interpolación inversa y extrapolación

1.6.1. Interpolación inversa

Dada una tabla de puntos, el problema de la interpolación inversa consiste, simplemente, en determinar para un valor dado de la función $f(x)$ la correspondiente x . Cualquiera de las formas de interpolación expuestas permite afrontar este problema, simplemente hay que considerar a la f como variable independiente y a x como variable dependiente. La interpolación inversa puede tener gran interés como método para contrastar los resultados obtenidos al resolver un problema de interpolación directa.

1.6.2. Extrapolación

La utilización de los polinomios interpoladores para calcular aproximaciones con valores no situados entre nodos de la tabla 1.5 da, en general, resultados bastante desastrosos. Solamente se obtienen buenos resultados en

la extrapolación para casos muy particulares de funciones. Por ejemplo, consideremos la tabla 1.5 donde f_i tiende a un límite f cuando i crece. Supongamos, además, que la sucesión $\{f - f_i\}$ es una progresión geométrica. Entonces, para tres valores consecutivos f_{k-1} , f_k , f_{k+1} , se tiene que

$$(f - f_{k-1})(f - f_{k+1}) = (f - f_k)^2,$$

y de aquí

$$f = f_{k+1} - \frac{(f_{k+1} - f_k)^2}{f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}}.$$

Esta fórmula se conoce como fórmula de extrapolación δ^2 de Aitken y más que como fórmula general de extrapolación, se utiliza para acelerar la convergencia en ciertos métodos iterativos.

1.7. Splines

Podemos pensar que, dada una nube de puntos, basta calcular el polinomio interpolador para obtener una aproximación aceptable de la función. Pero cuando el número de puntos de la tabla a ajustar es elevado, este proceso es computacionalmente, costoso y el resultado obtenido no suele ser bueno.

Otro método que se utiliza es la aproximación mediante Splines. Aquí se sigue la filosofía de que la aproximación obtenida será una función que pase por todos los puntos dados por la tabla y que esta función estará construida a partir de polinomios de grado a elegir, pero no muy alto en la práctica. Supongamos que se quieren aproximar, a partir de los datos de la tabla 1, los valores de una función $f(x)$, donde se supondrá que los puntos $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ definen una partición del intervalo $[a, b]$.

Definición 1.1 Dado un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y una partición \mathcal{P} de este intervalo

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b,$$

llamaremos spline de orden k asociado a la partición, a la función $S(x)$ definida del siguiente modo

$$S(x) = S_i(x) \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n$$

donde $S_i(x)$ son polinomios de grado k , que satisfacen:

$$\begin{aligned} S_i(x_{i-1}) &= f_{i-1} \\ S_i(x_i) &= f_i \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

y además,

$$\begin{cases} S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i) \\ \vdots \\ S_i^{k-1}(x_i) = S_{i+1}^{k-1}(x_i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (1.4)$$

A k se le llama grado del spline.

Los splines más utilizados en la práctica, son los splines de grado 3 o cúbicos, o sea, un conjunto de polinomios

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad i = 1, \dots, n,$$

que cumplen las condiciones anteriores. Veamos cómo podemos determinar estos polinomios.

Las condiciones (1.3) y (1.4), para los splines cúbicos, quedan de la forma:

$$\begin{aligned} S_i(x_{i-1}) &= f_{i-1} & i = 1, \dots, n, \\ S_i(x_i) &= f_i \\ S'_i(x_i) &= S'_{i+1}(x_i) & i = 1, \dots, n-1, \\ S''_i(x_i) &= S''_{i+1}(x_i) \end{aligned}$$

Hemos de determinar $4n$ coeficientes y se tienen $2n + 2(n-1) = 4n - 2$ condiciones. Harán falta, pues, dos condiciones extra que se suelen obtener imponiendo que $S''_1(x_0) = A$ y $S''_n(x_n) = B$, donde A y B son dos números reales. (En el caso que $A = B = 0$, el spline obtenido se llama spline natural).

Para obtener los polinomios, partimos de que $S''_i(x)$ son polinomios de grado 1 que cumplen $S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$. Así

$$S''_i(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)}{(x_i - x_{i-1})} + M_i \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.5)$$

Efectivamente

$$\begin{aligned} S''_i(x_i) &= M_i \\ S''_{i+1}(x_i) &= M_i \frac{(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} + M_{i+1} \frac{(x_i - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} = M_i. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Tendremos que calcular sólo M_1, \dots, M_{n-1} ya que la expresión (1.5) nos permite afirmar que

$$A = S''_1(x_0) = M_0,$$

y la expresión (1.6)

$$B = S''_n(x_n) = M_n.$$

Integrando la expresión (1.5) obtenemos

$$S_i(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6(x_i - x_{i-1})} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6(x_i - x_{i-1})} + \alpha_i x + \beta_i,$$

donde α_i y β_i son constantes de integración que se determinan imponiendo

$$\begin{aligned} S_i(x_{i-1}) &= f_{i-1} \\ S_i(x_i) &= f_i \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n,$$

con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{1}{6}(M_i - M_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ \beta_i &= f_i - \alpha_i x_i - \frac{1}{6}M_i(x_i - x_{i-1})^2. \end{aligned}$$

Introduciendo la notación $h_i \equiv x_i - x_{i-1}$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \frac{M_{i-1}}{6h_i}(x_i - x)^3 + \frac{M_i}{6h_i}(x - x_{i-1})^3 + (f_i - \frac{1}{6}M_i h_i^2) \frac{(x - x_{i-1})}{h_i} + \\ &+ (f_{i-1} - \frac{1}{6}M_{i-1} h_i^2) \frac{(x_i - x)}{h_i}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Falta calcular los M_i , para ello, se hace uso de la condición que nos queda $S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i)$ $i = 1, \dots, n-1$ obteniendo el sistema de ecuaciones

$$a_i M_{i-1} + M_i + c_i M_{i+1} = d_i,$$

donde los coeficientes vienen dados por las expresiones

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{h_i}{2(h_i + h_{i+1})}; \quad c_i = \frac{h_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1})}, \\ d_i &= \frac{1}{2(h_i + h_{i+1})} \left\{ \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right\}. \end{aligned}$$

Este sistema es un sistema tridiagonal, cuya matriz de coeficientes es de la forma:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix},$$

y, una vez resuelto, basta sustituir en (1.7) para obtener los distintos polinomios del spline cúbico.

Ejemplo 1.5 Consideremos la tabla de valores

Tabla 1.8.-

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	4	9	16	25

cuyos puntos representamos en la figura 1.3.

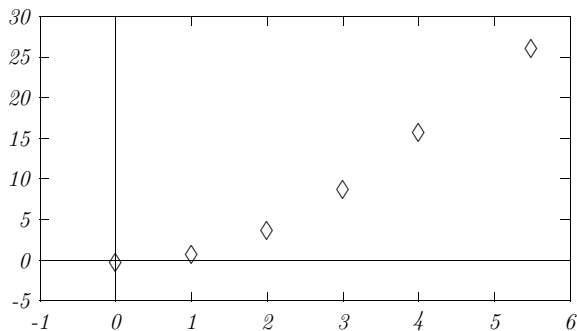


Fig. 1.3.- Gráfica de los puntos de la tabla 1.8.

Suponiendo que $M_0 = M_5 = 0$ y teniendo en cuenta que $h_j = 1$, $j = 1, \dots, 5$, calculamos los valores $a_i = 0,25$, $c_i = 0,25$, $d_i = 0,5$, $i = 1, \dots, 4$, que dan lugar a la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & c_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & a_4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0,25 & 1 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 1 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos el sistema

$$[A] \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

y obtenemos

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,421 \\ 0,316 \\ 0,316 \\ 0,421 \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo en (1.7) obtenemos el spline

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \frac{0,421}{6}x^3 + \left(1 - \frac{0,421}{6}\right)x, \\ S_2(x) &= \frac{0,421}{6}(2-x)^3 + \frac{0,316}{6}(x-1)^3 + \left(4 - \frac{0,316}{6}\right)(x-1) \\ &\quad + \left(1 - \frac{0,421}{6}\right)(2-x), \\ S_3(x) &= \frac{0,316}{6}(3-x)^3 + \frac{0,316}{6}(x-2)^3 + \left(9 - \frac{0,316}{6}\right)(x-2) \\ &\quad + \left(4 - \frac{0,316}{6}\right)(3-x), \\ S_4(x) &= \frac{0,316}{6}(4-x)^3 + \frac{0,421}{6}(x-3)^3 + \left(16 - \frac{0,421}{6}\right)(x-3) \\ &\quad + \left(9 - \frac{0,316}{6}\right)(4-x), \\ S_5(x) &= \frac{0,421}{6}(5-x)^3 + 25(x-4) + \left(16 - \frac{0,421}{6}\right)(5-x). \end{aligned}$$

En la figura 1.4, representamos los puntos de la tabla junto con la gráfica del spline obtenido.

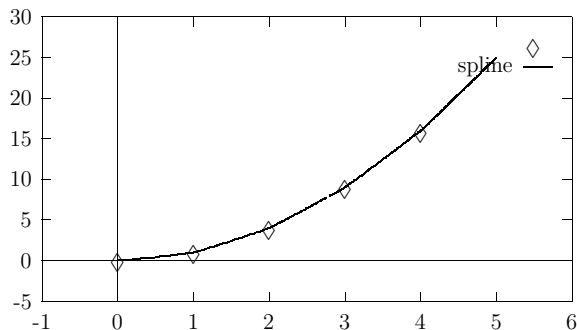


Fig. 1.4.- Puntos de la tabla 1.8 y el spline obtenido.

1.8. Ejercicios

- ¿Cuál es el polinomio de interpolación de la función $f(x) = 1$ en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n ?.
- Calcular un polinomio interpolador tal que en los puntos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ tome los mismos valores que la función $f(x) = 3^x$.
- Escribir un polinomio de grado no mayor que 2 que tome los valores 1, 2, -1 en los puntos 0, 1, -2.
- Dada la tabla

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	13	44	107

determinar el polinomio interpolador de Newton asociado a estos datos.

- Dada la tabla

x	-2	1	2	4
$f(x)$	25	-8	-15	-23

determinar el polinomio interpolador de Lagrange asociado a estos datos, dar una estimación de $f(0)$.

- Calcular el polinomio interpolador de Newton para la función tabulada

x	2	4	6	8
$f(x)$	3	11	27	50

Si sabemos a posteriori que $f(10) = 83$, determinar el nuevo polinomio interpolador de Newton.

- Se tiene la siguiente tabla de datos

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\text{Si}(x)$	0	0.19956	0.39646	0.58813	0.77210	0.94608

donde $\text{Si}(x)$ es la función 'seno integral' dada por

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}(t)}{t} dt .$$

Calcular el polinomio interpolador correspondiente a los puntos de la tabla y obtener el valor de x tal que $\text{Si}(x) = 0,45$.

- La presión y el volumen de una masa gaseosa están ligados por cierta función. Con los siguientes datos obtenidos experimentalmente

Presión	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
Volumen	1.65	1.03	0.74	0.61	0.53

- Determinar un polinomio interpolador de grado menor o igual que 4 para estos datos.
 - Utilizar la información del apartado anterior para determinar un polinomio que tome el valor 0.45 para el volumen a una presión de 3.
 - Calcular volumen aproximado para una presión de 0.6. Estudiar esta aproximación utilizando ambos polinomios.
- La tabla adjunta muestra las puntuaciones de Álgebra y Física de 5 estudiantes

Álgebra	7.5	8	9.3	6.5	8.7
Física	8.2	7.8	8.6	7.2	9.1

- Hallar un polinomio de grado a lo sumo 4 que interpole estos valores.

- b) Calcular la nota que, aproximadamente, se espera que obtenga un alumno de Física si en Álgebra tiene un 7.

10. El número de bacterias por unidad de volumen presentes en un cultivo después de un número determinado de horas, viene dado por

Horas	0	2	4	6
Bacterias	32	65	132	275

- a) Hallar un polinomio interpolador de grado 3 a lo sumo para estos datos.
 b) A posteriori se analiza también el cultivo para diferentes tiempos, obteniendo

Horas	1	3	5
Bacterias	47	92	190

Calcular el polinomio interpolador para esta tabla, de grado menor o igual que 2.

- c) Tomando todos los datos, construir el polinomio interpolador de grado máximo.
 d) Comparar los distintos valores que se obtienen al considerar un periodo de tiempo igual a dos horas y media.
11. Construir un spline cúbico natural para aproximar $f(x) = \cos(\pi x)$ usando los valores dados por $f(x)$ en $x = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1,0$. Integrar el spline en el intervalo $[0, 1]$, y comparar con el resultado

$$\int_0^1 \cos(\pi x) dx = 0.$$

Usar la derivada del spline para aproximar $f'(0,5)$ y $f''(0,5)$.

12. Calcular el spline cúbico que aproxime a la función $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$ en $x = 1,03$, utilizando los datos de la siguiente tabla

x	1.0	1.02	1.04	1.06
$f(x)$	0.76578939	0.79536678	0.82268817	0.84752226

Capítulo 2

Ajuste de curvas

En muchos problemas de tipo práctico, se dispone de gran cantidad de datos que se pretenden ajustar mediante una función con pocos parámetros. Para este tipo de problemas hay que desarrollar una estrategia distinta de la seguida en el problema de la interpolación.

Supongamos que se pretende ajustar los datos de una tabla de la forma

Tabla 2.1.- Tabla de datos.

x_0	x_1	\dots	\dots	x_n
y_0	y_1	\dots	\dots	y_n

mediante una función que depende de k parámetros

$$y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_k).$$

Así, por un lado tenemos los datos que proporciona la tabla

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \tag{2.1}$$

y por otro los valores que predice la función

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \tag{2.2}$$

que se pretende que sean lo más cercanos posibles. Se pueden definir distintos errores que miden la distancia entre estos dos conjuntos de puntos. Así el *error máximo* se define como

$$E_\infty = \max_{0 \leq i \leq n} |f(x_i) - y_i|, \tag{2.3}$$

el error medio se define como

$$E_1 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n |f(x_i) - y_i|, \quad (2.4)$$

y el error cuadrático medio

$$E_2 = \left[\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (f(x_i) - y_i)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.5)$$

El problema del ajuste se puede plantear como el problema de buscar el valor de los parámetros a_1, a_2, \dots, a_k que hace mínima la distancia entre los conjuntos de puntos (2.1) y (2.2). Si la distancia entre los dos conjuntos se obtiene usando el error cuadrático medio, el problema del ajuste se denomina ajuste o aproximación de mínimos cuadrados. Veamos algunos ejemplos.

2.1. Recta de mínimos cuadrados

Supongamos que se quiere ajustar los datos de la tabla 2.1 mediante una recta de la forma

$$f(x, a, b) = ax + b.$$

El error cuadrático medio para este caso es de la forma

$$E_2 = \left[\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right]^{1/2}.$$

Para calcular a y b que hagan mínimo el error, se plantean las ecuaciones normales

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \left(\frac{1}{n+1} \right)^{1/2} \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right]^{-1/2} 2 \sum_{i=0}^n (y_i - ax_i - b) (-x_i) = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \left(\frac{1}{n+1} \right)^{1/2} \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right]^{-1/2} (-2) \sum_{i=0}^n (y_i - ax_i - b) = 0,$$

con lo que se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=0}^n y_i x_i - a \sum_{i=0}^n x_i^2 - b \sum_{i=0}^n x_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^n y_i - a \sum_{i=0}^n x_i - b \sum_{i=0}^n 1 = 0.$$

Utilizando la Regla de Cramer obtenemos las soluciones

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^n y_i x_i & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n y_i & \sum_{i=0}^n 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n 1 \end{vmatrix}} = \frac{(n+1) \sum_{i=0}^n y_i x_i - \left(\sum_{i=0}^n y_i \right) \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)}{(n+1) \sum_{i=0}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^n x_i \right) \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)} \quad (2.6)$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n y_i x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n 1 \end{vmatrix}} = \frac{\left(\sum_{i=0}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=0}^n y_i \right) - \left(\sum_{i=0}^n x_i \right) \left(\sum_{i=0}^n y_i x_i \right)}{(n+1) \sum_{i=0}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^n x_i \right) \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)} \quad (2.7)$$

Veamos un ejemplo. Dada la tabla de datos siguiente:

Tabla 2.2.- Tabla de datos.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1.3	3.5	4.2	5.0	7.0	8.8	10.1	12.5	13.0	15.6

Trataremos de ajustar la nube puntos mediante una recta usando la aproximación de mínimos cuadrados. Basta para ello, utilizar las expresiones (2.6)

y (2.7) para calcular los parámetros de la recta, obteniendo

$$a = 1,538, \quad b = -0,360.$$

En la figura 2.1 se muestra la nube de puntos y la recta ajustada.

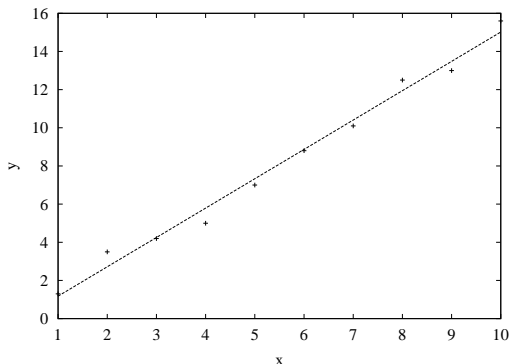


Fig. 2.1.- Nube de puntos asociada a la tabla 2.2 y su recta de mínimos cuadrados.

Hay distintas funciones que se pueden reducir a una recta mediante un cambio de variable y, por tanto, se pueden usar para ajustar los datos de una tabla siguiendo una metodología similar a la que se ha expuesto. Como ejemplo, se muestran las siguientes funciones:

$$y = a\frac{1}{x} + b \quad \rightarrow \quad y = at + b, \quad t = \frac{1}{x},$$

$$y = \frac{d}{x+c} \quad \rightarrow \quad x = d\frac{1}{y} - c,$$

$$y = \frac{x}{ax+b} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{y} = ax + b,$$

$$y = ce^{ax} \quad \rightarrow \quad \ln(y) = \ln(c) + ax,$$

$$y = cx^a \quad \rightarrow \quad \ln(y) = \ln(c) + a \ln(x),$$

$$y = \frac{1}{(ax+b)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{y}} = ax + b,$$

2.2. Parábola de mínimos cuadrados

Supongamos ahora que se quiere ajustar los datos de la tabla 2.1 mediante una parábola de la forma

$$f(x, a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (2.8)$$

El error cuadrático medio para este caso es de la forma

$$E_2 = \left[\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)^2 \right]^{1/2}.$$

Los valores de los parámetros a_0 , a_1 y a_2 se obtienen resolviendo las ecuaciones normales

$$\frac{\partial E_2}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial E_2}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial E_2}{\partial a_2} = 0.$$

que dan lugar al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n y_i &= a_0 \sum_{i=0}^n 1 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2, \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i &= a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3, \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i^2 &= a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4, \end{aligned} \quad (2.9)$$

La solución del sistema (2.9) nos proporciona los parámetros de la parábola de mínimos cuadrados.

Consideremos los datos de la tabla siguiente

Tabla 2.3.- Tabla de datos.

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1.0
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

Ajustaremos los puntos mediante una parábola. Planteando las ecuaciones (2.9) y resolviéndolas, obtenemos

$$a_0 = 1,0052, \quad a_1 = 0,8641, \quad a_2 = 0,8437.$$

En la figura 2.2 se muestra la nube de puntos y la parábola ajustada.

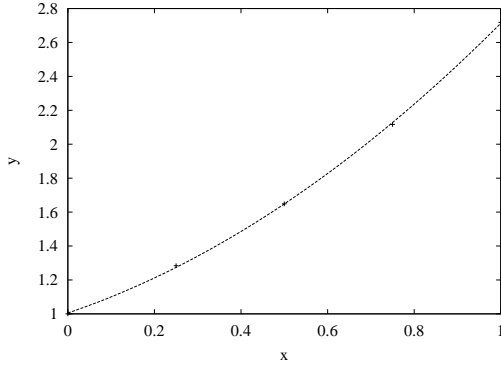


Fig. 2.2.- Nube de puntos asociada a la tabla 2.3 y su parábola de mínimos cuadrados.

2.3. Ajuste no lineal

Veremos algunos ejemplos donde al aplicar la metodología del ajuste por mínimos cuadrados se obtienen ecuaciones no lineales, que en general no tienen una solución analítica. No obstante va a ser posible estimar los valores de los parámetros de las funciones utilizando métodos numéricos que estudiaremos en el próximo capítulo.

Hay muchos procesos que se pueden modelizar mediante una ecuación de la forma

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} . \quad (2.10)$$

Piénsese, por ejemplo, en la solución de una ecuación diferencial lineal de la forma

$$y'' + ay' + by = 0 ,$$

donde no se conozcan los parámetros a , y b . Su solución general será de la forma (2.10) con

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} .$$

Nos planteamos pues, ajustar una función de la forma (2.10) a los datos de la tabla 2.1. El error cuadrático medio en este caso es de la forma

$$E_2 = \left[\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (y_i - C_1 e^{\lambda_1 x_i} - C_2 e^{\lambda_2 x_i})^2 \right]^{1/2} .$$

Las ecuaciones normales

$$\frac{\partial E_2}{\partial C_1} = \frac{\sum_{i=0}^n (y_i - C_1 e^{\lambda_1 x_i} - C_2 e^{\lambda_2 x_i}) (e^{\lambda_1 x_i})}{(n+1)^{1/2} \left[\sum_{i=0}^n (y_i - C_1 e^{\lambda_1 x_i} - C_2 e^{\lambda_2 x_i})^2 \right]^{1/2}} = 0 ,$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial C_2} = \frac{\sum_{i=0}^n (y_i - C_1 e^{\lambda_1 x_i} - C_2 e^{\lambda_2 x_i}) (e^{\lambda_2 x_i})}{(n+1)^{1/2} \left[\sum_{i=0}^n (y_i - C_1 e^{\lambda_1 x_i} - C_2 e^{\lambda_2 x_i})^2 \right]^{1/2}} = 0 ,$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial \lambda_1} = - \frac{\sum_{i=0}^n (y_i - C_1 e^{\lambda_1 x_i} - C_2 e^{\lambda_2 x_i}) (C_1 x_i e^{\lambda_1 x_i})}{(n+1)^{1/2} \left[\sum_{i=0}^n (y_i - C_1 e^{\lambda_1 x_i} - C_2 e^{\lambda_2 x_i})^2 \right]^{1/2}} = 0 ,$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial \lambda_2} = - \frac{\sum_{i=0}^n (y_i - C_1 e^{\lambda_1 x_i} - C_2 e^{\lambda_2 x_i}) (C_2 x_i e^{\lambda_2 x_i})}{(n+1)^{1/2} \left[\sum_{i=0}^n (y_i - C_1 e^{\lambda_1 x_i} - C_2 e^{\lambda_2 x_i})^2 \right]^{1/2}} = 0 ,$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{i=0}^n y_i e^{\lambda_1 x_i} - C_1 \sum_{i=0}^n e^{2\lambda_1 x_i} - C_2 \sum_{i=0}^n e^{(\lambda_1 + \lambda_2) x_i} = 0 ,$$

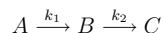
$$\sum_{i=0}^n y_i e^{\lambda_2 x_i} - C_1 \sum_{i=0}^n e^{(\lambda_1 + \lambda_2) x_i} - C_2 \sum_{i=0}^n e^{2\lambda_2 x_i} = 0 ,$$

$$\sum_{i=0}^n y_i x_i C_1 e^{\lambda_1 x_i} - C_1^2 \sum_{i=0}^n e^{2\lambda_1 x_i} - C_1 C_2 \sum_{i=0}^n x_i e^{(\lambda_1 + \lambda_2) x_i} = 0 ,$$

$$\sum_{i=0}^n y_i x_i C_2 e^{\lambda_2 x_i} - C_1 C_2 \sum_{i=0}^n e^{(\lambda_1 + \lambda_2) x_i} - C_2^2 \sum_{i=0}^n x_i e^{2\lambda_2 x_i} = 0 .$$

que es un sistema de ecuaciones no lineales, cuya solución veremos cómo se puede abordar en el próximo capítulo.

Ejemplo 2.1 Se tienen dos reacciones químicas consecutivas



de las que se conoce que la evolución con el tiempo de la concentración de la especie B viene dada por los valores

t (seg)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	5.0	10
[B]	0.000	1.003	1.500	1.725	1.815	1.820	1.782	1.505	0.892

La evolución con el tiempo de las concentraciones de A y B se puede modelizar mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= -k_1[A] , \\ \frac{d[B]}{dt} &= -k_2[B] + k_1[A] . \end{aligned}$$

Se pide estimar los valores de k_1 y k_2 que ajusten los valores experimentales sabiendo que $[A](0) = 8$ moles.

Solución.-

En primer lugar hay que resolver el problema de valores iniciales asociado a las concentraciones.

De la primera ecuación obtenemos

$$[A] = C_1 e^{-k_1 t} ,$$

e imponiendo que se satisfaga la condición inicial $[A](0) = 8$, llegamos a que

$$[A] = 8e^{-k_1 t} .$$

La segunda ecuación queda

$$\frac{d[B]}{dt} = -k_2[B] + k_1 8e^{-k_1 t} .$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$[B]_h = C_2 e^{-k_2 t} ,$$

se prueba una solución particular de la forma

$$[B]_p = \alpha e^{-k_1 t}$$

e imponiendo que sea solución se tiene

$$[B]_p = \frac{8k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} .$$

Se tiene pues la solución general

$$[B] = C_2 e^{-k_2 t} + \frac{8k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} .$$

La constante C_2 se determina utilizando la condición inicial $[B](0) = 0$, con lo que se obtiene

$$[B] = \frac{8k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) .$$

Una vez hemos obtenido la forma funcional de la evolución de la concentración de B, hemos de determinar k_1 y k_2 para que se la función ajuste los datos experimentales. El error cuadrático medio cumple

$$E_2^2 = \sum_{i=1}^8 \left([B]_i - \frac{8k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t_i} - e^{-k_2 t_i}) \right)^2 ,$$

y las ecuaciones normales son de la forma

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^8 \left([B]_i - \frac{8k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t_i} - e^{-k_2 t_i}) \right) \times \\ & \times \left(-\frac{8k_2}{(k_2 - k_1)^2} (e^{-k_1 t_i} - e^{-k_2 t_i}) - \frac{8k_1}{k_2 - k_1} t_i e^{-k_1 t_i} \right) = 0 , \\ & \sum_{i=1}^8 \left([B]_i - \frac{8k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t_i} - e^{-k_2 t_i}) \right) \times \\ & \left(\frac{8k_1}{(k_2 - k_1)^2} (e^{-k_1 t_i} - e^{-k_2 t_i}) - \frac{8k_1}{k_2 - k_1} t_i e^{-k_1 t_i} \right) = 0 , \end{aligned}$$

2.4. Ejercicios

1. Escribir el sistema análogo al (2.9) que se obtiene si en vez de la parábola (2.8), consideramos un polinomio de grado k .

2. Se tomaron los siguientes datos del coeficiente de atenuación en función del espesor de una muestra de taconite

Espesor (cm)	Coeficiente (db/cm)
0.040	26.5
0.041	28.1
0.055	25.2
0.056	26.0
0.062	24.0
0.071	25.0
0.078	27.2
0.082	25.6
0.090	25.0
0.092	26.8

Obtener la recta de mínimos cuadrados asociada a estos datos.

3. Se conoce que la relación existente entre el peso vivo de las larvas de la mariposa nocturna W (g) y el oxígeno consumido por la larva R en ml/h es aproximadamente de la forma

$$R = bW^a .$$

Obtener los valores de a y b a partir de los datos de la siguiente tabla

W	R
0.017	0.154
0.087	0.296
0.174	0.363
1.11	0.531
1.74	2.23
4.09	3.58
5.45	3.52
5.96	2.40

4. bajo ciertas condiciones se conoce que la evolución de una población con el tiempo se puede modelizar mediante una ecuación logística de la forma

$$P(t) = \frac{1000}{1 + Ce^{At}} .$$

Obtener C y A para la siguiente tabla de datos

$P(t)$	200	400	650	850	950
t	0	1	2	3	4

5. Dada la tabla de mineralización del nitrógeno

Tiempo (días)	Nmin (mg/kg)
7	9.466
14	8.211
27	15.590
41	17.615
55	20.215
83	21.734

Obtener las ecuaciones normales para el modelo $Nmin = N0(1 - \exp(-kt))$.

Capítulo 3

Resolución de ecuaciones no lineales

Generalmente, no es posible encontrar expresiones explícitas para las soluciones de una ecuación de la forma $f(x) = 0$. Por ello, será interesante disponer de métodos que nos proporcionen aproximaciones de estas raíces. Pasaremos a discutir algunos métodos numéricos sencillos para el tratamiento de este problema.

3.1. Ecuaciones no lineales

3.1.1. Método de la bisección

Supongamos, por ejemplo, que se quiere calcular una solución de la ecuación

$$x^2 = 2,$$

sabiendo que la solución está en un intervalo $[a, b] = [1, 2]$. Probamos con un punto c que sea el punto medio del intervalo

$$c = \frac{a + b}{2},$$

calculamos $c^2 = (1,5)^2 = 2,25$. Como $c^2 > 2$, entonces tendremos que la raíz estará en un nuevo intervalo $[a', b'] = [a, c]$. Repitiendo esta estrategia se van obteniendo intervalos cada vez más pequeños que contienen la raíz buscada.

El siguiente código de Matlab resuelve el problema

```
M=2;
a=1;
b=2;
k=0;
tol=1.0e-5;
while (b-a) >tol
    x=(a+b)/2;
    if x^2>M
        b=x;
    else
        a=x;
    end
    k=k+1;
end
sol=(a+b)/2
```

Éste es un método lento pero seguro para obtener una raíz de una ecuación del tipo

$$f(x) = 0.$$

Si $f(x)$ es una función continua, sólo hace falta conocer un intervalo $[a, b]$ de forma que se satisfaga $f(a)f(b) < 0$.

3.1.2. Método del punto fijo

Definición 3.1 Diremos que un punto p es un punto fijo de una función $\varphi(x)$ si se satisface $\varphi(p) = p$.

Supongamos que se busca una raíz de una ecuación

$$f(x) = 0,$$

el método del punto fijo consiste en reescribir esta ecuación de la forma

$$x = \varphi(x),$$

y construir una sucesión de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0) \\ x_2 &= \varphi(x_1) \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= \varphi(x_n) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Si existe un m tal que $x_{m+1} \approx x_m$, se cumplirá que $x_m \approx \varphi(x_m)$ y, por tanto, se podrá tomar como valor aproximado de la raíz x_m .

Ejemplo 3.1 Suponemos que se quiere buscar una raíz de la función

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

en $[1, 2]$. Se pueden hacer diferentes elecciones de la función $\varphi(x)$, por ejemplo,

- a) $\varphi_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$; b) $\varphi_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$;
 c) $\varphi_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$; d) $\varphi_4(x) = (10/(4+x))^{1/2}$;
 e) $\varphi_5(x) = x - (x^3 + 4x^2 - 10)/(8x + 3x^2)$

si tomamos como valor inicial $x_0 = 1,5$ y construimos las sucesiones correspondientes a las distintas elecciones, se obtienen los valores de la tabla 3.1.

Tabla 3.1.- Resultado para la iteración del punto fijo $x = \varphi(x)$.

n	a)	b)	c)	d)	e)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.37333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-469.7	-	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8	-	1.375170253	1.365264748	1.365230013
5	-	-	1.360094193	1.365225594	-
6	-	-	1.367846968	1.365230576	-
7	-	-	1.363887004	1.365229942	-
8	-	-	1.365916734	1.365230022	-
9	-	-	1.364878217	1.365230012	-
10	-	-	1.365410062	1.365230014	-

Para obtener una solución por este método, es necesario que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ construida como en (3.1) sea convergente, y el límite de esta sucesión coincida con la raíz. Las condiciones necesarias para que esto ocurra se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 2 (Teorema del punto fijo) Sea $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, y además que cumple que $|\varphi'(x)| \leq k < 1, \forall x \in]a, b[$. Entonces existe un único $c \in]a, b[$ tal que $\varphi(c) = c$. Además para todo $x_0 \in]a, b[$, la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ obtenida de la forma $x_0, x_n = \varphi(x_{n-1})$ converge a c .

Este teorema ayuda a elegir una función $\varphi(x)$ adecuada, por ejemplo para la opción d) del ejemplo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_4(x) &= (10/(4+x))^{1/2}; \\ \varphi_4'(x) &= \sqrt{10}(-1/2)(4+x)^{-3/2}; \\ |\varphi_4'(x)| &= \sqrt{10}/2|(4+x)^{-3/2}| < \sqrt{10}/(2 \cdot 5^{3/2}) = 0,141 < 1. \end{aligned}$$

Luego la sucesión converge en $[1, 2]$.

3.1.3. Método de Newton-Raphson

Este método se basa en utilizar el desarrollo de Taylor para aproximar una función derivable en las proximidades de un punto.

Escribimos $x_1 = x_0 + \Delta x$, y usando el desarrollo de Taylor

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x^2),$$

y suponiendo que $f(x_1) = 0$, queda

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

El método de Newton-Raphson se basa en esta ecuación y consiste en calcular los valores de una sucesión de la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Otro modo de obtener este método consiste en suponer que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y tal que $f''(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$. El proceso para encontrar un x tal que $f(x) = 0$ consiste en lo siguiente:

- 1) Fijamos $c = a$ ó b , tal que $f(c)f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$.
- 2) $x_0 = c$.
- 3) Hallamos la ecuación de la tangente que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y el punto de corte de dicha tangente con el eje X . El proceso se repite hasta conseguir una sucesión de aproximaciones que converga a la raíz de $f(x) = 0$.

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ viene dada por

$$y = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) \quad .$$

La abscisa del punto de intersección de la recta tangente con el eje X , viene dada por

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad ,$$

y mediante esta relación obtenemos una sucesión, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de aproximaciones al valor de la raíz buscada.

El error que se comete en la iteración n -ésima será

$$|r - x_n| < \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}| \quad ,$$

donde $0 < m \leq |f(x)|$ y $|f''(x)| \leq M, \forall x \in (a, b)$.

Ejemplo 3.2 Se busca la solución de $y = \cos(x)$. Se construye la función

$$f(x) = x - \cos(x) \quad ,$$

utilizando la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)} \quad ,$$

y el punto inicial $x_0 = 0,7$, se obtiene la siguiente tabla de valores

Tabla 3.2.- Resultado de la iteración de Newton.

n	x_n
1	0.7393981635
2	0.7395361337
3	0.7390851781
4	0.7390851332
5	0.7390851332

3.1.4. Método de la secante

Una de las desventajas del método de Newton para obtener las raíces de una ecuación de la forma

$$f(x) = 0 \quad ,$$

es que es necesario conocer la derivada $f'(x)$. En ocasiones esta derivada es difícil de calcular o no se dispone de la misma, y se utiliza una aproximación de la forma

$$s_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \quad ,$$

obteniendo el método de la secante, que se basa en iteraciones de la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{s_n} \quad .$$

El método de la secante hace uso de dos aproximaciones iniciales para la raíz.

3.2. Sistemas de ecuaciones no lineales

Los métodos anteriores se pueden generalizar para el caso de sistemas de ecuaciones. Consideraremos sólo sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, la generalización para un número mayor de ecuaciones es sencilla.

3.2.1. Método iterativo del punto fijo

Partimos de un sistema de la forma

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \quad , \\ f_2(x, y) &= 0 \quad , \end{aligned}$$

del que se pretende obtener la solución. Para utilizar el método del punto fijo, se reescribe el sistema de la forma

$$\begin{aligned} x &= g_1(x, y) \quad , \\ y &= g_2(x, y) \quad . \end{aligned}$$

Se construye la sucesión

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (g_1(x_n, y_n), g_2(x_n, y_n))$$

que como ocurre en el caso escalar la eficiencia del método dependerá de la elección de las funciones g_1 y g_2 .

Ejemplo 3.3 Suponemos que se quiere buscar una solución del sistema

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + y^2 + 8 &= 0 \quad , \\ xy^2 + x - 10y + 8 &= 0 \quad , \end{aligned}$$

se eligen

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{10} (x^2 + y^2 + 8) , \\y &= \frac{1}{10} (xy^2 + x + 8) .\end{aligned}$$

Se parte de $(x, y) = (0, 0)$ y, utilizando el método del punto fijo, se obtiene la sucesión mostrada en la tabla 3.3.

Tabla 3.3.- Resultado de la iteración del punto fijo para el sistema.

x_n	y_n
0	0
0.8000	0.8000
0.9414	0.9670
0.9821	0.9901
0.9945	0.9969
0.9983	0.9990
0.9995	0.9997
0.9998	0.9999
0.9999	1

3.2.2. Método de Newton-Raphson

Este método se basa en utilizar el desarrollo de Taylor para aproximar una función derivable en las proximidades de un punto en este caso de funciones de dos variables. Partimos de un sistema de la forma

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= 0 , \\f_2(x, y) &= 0 ,\end{aligned}$$

del que se pretende obtener la solución. Se supone que

$$x = x_0 + \Delta x \text{ e } y = y_0 + \Delta y$$

luego

$$\begin{aligned}f_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= 0 , \\f_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= 0 .\end{aligned}$$

Utilizando el desarrollo de Taylor alrededor de (x_0, y_0) y quedandonos con el primer orden, tenemos

$$\begin{aligned}f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y &\approx 0 , \\f_2(x_0, y_0) + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y &\approx 0 ,\end{aligned}$$

si introducimos la notación $\vec{x} = (x, y)$, $\vec{F} = (f_1, f_2)$ y

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

queda

$$\vec{F}(\vec{x}_0) + J(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0) \approx 0$$

entonces

$$\vec{x} = \vec{x}_0 - J^{-1}(\vec{x}_0) \vec{F}(\vec{x}_0)$$

y el método de Newton consiste en calcular la sucesión

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - J^{-1}(\vec{x}_n) \vec{F}(\vec{x}_n) .$$

Dado que calcular explícitamente la matriz inversa del Jacobiano no es un proceso muy eficiente desde el punto de vista numérico, a la hora de implementar el método se hace en dos pasos:

1. se resuelve el sistema

$$J(\vec{x}_n) \Delta \vec{x}_{n+1} = -\vec{F}(\vec{x}_n) ,$$

2. se calcula

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \Delta \vec{x}_{n+1} .$$

Ejemplo 3.4 Suponemos que se quiere buscar una solución del sistema

$$\begin{aligned}f_1 &= x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0 \\f_2 &= xy^2 + x - 10y + 8 = 0\end{aligned}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 10 & 2y \\ y^2 + 1 & 2xy - 10 \end{bmatrix}$$

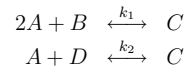
y se parte de $(x, y) = (0, 0)$ se obtiene la sucesión:

Tabla 3.4.- Resultado de la iteración del método. de Newton para el sistema

<i>i</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
1	0	0
2	0.8	0.88
3	0.9918	0.9917
4	1	1
5	1	1

como se observa la convergencia con este método es, en general, más rápida que con el método del punto fijo.

Ejemplo 3.5 Se tiene el equilibrio químico



con

$$k_1 = C_C / (C_A^2 C_B) = 5 \cdot 10^{-4},$$

$$k_2 = C_C / (C_A C_D) = 4 \cdot 10^{-2}$$

y las concentraciones iniciales:

$$C_{A,0} = 40, C_{B,0} = 15, C_{C,0} = 0, C_{D,0} = 10.$$

Si llamamos *x* a la concentración de B que ha reaccionado e *y* a la proporción de D que ha reaccionado, se tiene

$$C_A = C_{A,0} - 2C_{B,0}x - C_{D,0}y = 40 - 30x - y$$

$$C_B = (1 - x) C_{B,0} = 15 - 15x$$

$$C_C = C_{C,0} + C_{B,0}x + C_{D,0}y = 15x + 10y$$

$$C_D = (1 - y) C_{D,0} = 10 - 10y.$$

Así, el sistema que se tiene que resolver será

$$\frac{15x + 10y}{(40 - 30x - 10y)^2 (15 - 15x)} - 5 \cdot 10^{-4} = 0,$$

$$\frac{15x + 10y}{(40 - 30x - 10y)(10 - 10x)} - 4 \cdot 10^{-2} = 0.$$

Este sistema se puede resolver numéricamente utilizando el método de Newton-Raphson.

Las siguientes funciones muestran una posible implementación en Matlab de este método.

```
function y=f(x)
% funcion para utilizar con newtonsi.m
y(1)=x(1)^2-10*x(1)+x(2)^2+8;
y(2)=x(1)*x(2)^2+x(1)-10*x(2)+8;

function df=jac(x)
% matriz jacobiana para usar con newtonsi.m
df(1,1)=2*x(1)-10;
df(1,2)=2*x(2);
df(2,1)=x(2)^2+1;
df(2,2)=2*x(1)*x(2)-10;

function [xr,k]=newtonsi(x,tol,imax)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Metodo de Newton para sistemas de ecuaciones
% Uso: [xr,k]=newtonsi(x,tol,imax)
%
% Input:
% x = vector x1,x2,...,xn inicial,
% tol=tolerancia
%
% Se ha de disponer de las funciones:
%   f.m funcion y=f(x) donde se define el sistema
%   jac.m funcion df=jac(x) donde se define la matriz
%   derivada del sistema.
%
% Output: xr= raiz, k= numero de iteraciones.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
k=1;
epi=1;
x1=x;
while norm(epi)>tol
    x=x1;
    fxn=f(x);
    axn=jac(x);
    epi=axn\fxn';
    x1=x-epi';
```

```

k=k+1;
if k>imax
    disp('no converge')
    break
end
end
xr=x1;

```

3.2.3. Método de Broyden

El método de Broyden generaliza el método de la secante para resolver ecuaciones no lineales par el caso de un sistema de ecuaciones.

Para el caso unidimensional de tomaba una aproximación de la derivada de $f(x)$

$$s_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

y se hacían iteraciones de la forma

$$x_{n+1} = x_n - s_n^{-1} f(x_n).$$

Para el caso de un sistema, se ha de obtener una aproximación de la matriz derivada, S_n , que cumpla

$$S_n (x_n - x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_{n-1}).$$

Introducimos la siguiente notación

$$\begin{aligned} b_n &= x_{n+1} - x_n, \\ \Delta f_n &= f(x_{n+1}) - f(x_n), \\ S_{n+1} &= S_n + C_n. \end{aligned}$$

Con lo que tenemos que

$$S_{n+1} (x_{n+1} - x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n),$$

o sea,

$$(S_n + C_n) b_n = \Delta f_n,$$

y, por tanto,

$$C_n b_n = \Delta f_n - S_n b_n.$$

De este modo, dado un vector w_n^T tal que $w_n^T b_n \neq 0$, podemos elegir

$$C_n = \frac{1}{w_n^T b_n} (\Delta f_n - S_n b_n) w_n^T,$$

ya que

$$C_n b_n = \Delta f_n - S_n b_n.$$

Si elegimos $w_n^T = b_n$, se obtiene el primer método de Broyden, y si elegimos $w_n = S_n^T b_n$ se obtiene el segundo método de Broyden.

Así pues, el método de Broyden para sistemas parte de una aproximación inicial para la raíz, x_0 , y una aproximación para la matriz derivada del sistema, S_0 , y se basa en iteraciones de la forma

$$\begin{aligned} b_n &= -S_n^{-1} f(x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + b_n, \\ \Delta f_n &= f(x_{n+1}) - f(x_n), \\ S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{w_n^T b_n} (\Delta f_n - S_n b_n) w_n^T. \end{aligned}$$

3.3. Ejercicios

- Supongamos que se tiene un objeto cayendo verticalmente a través del aire sujeto a una resistencia viscosa y a la fuerza de gravedad. Si suponemos que la altura inicial a la que se encuentra es S_0 , la altura del objeto al cabo de t segundos es

$$S(t) = S_0 + \frac{mg}{k} t - \frac{m^2 g}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right),$$

donde $g = -9,81 \text{ m/s}^2$ y la constante k representa el coeficiente de resistencia del aire. Si tomamos $S_0 = 300 \text{ m}$, $m = 0,25 \text{ kg}$, y $k = 0,1 \text{ kg s m}^{-1}$. Estima el tiempo que tardará el objeto en caer al suelo.

- Verifica que la ecuación

$$x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0,$$

se puede escribir como

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= (3 + x - 2x^2)^{\frac{1}{4}} & \text{c) } x &= \left(\frac{x+3}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \text{b) } x &= \left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \text{d) } x &= \frac{3x^4+2x^2+3}{4x^3+4x-1}. \end{aligned}$$

Calcula 5 iteraciones del método del punto fijo con $x_0 = 1 + a$, donde a es un número aleatorio entre 0 y 1. ¿Qué ocurre si para el caso b) se toma $x_0 = 2 + a$. ¿Qué ocurre si para el caso c) se toma $x_0 = -3 - a$? ¿Qué ocurre si para el caso d) se toma $x_0 = 0,2367$?

Capítulo 4

Sistemas dinámicos lineales

4.1. Introducción

En este tema trataremos de estudiar el comportamiento de un sistema que evoluciona en el tiempo. Este sistema puede tener una variable que modifique su comportamiento, que se denomina entrada del sistema. Para fijar ideas supongamos que estamos utilizando cierto aparato eléctrico como puede ser un molinillo de café que constituirá nuestro sistema dinámico. Necesitamos que el café molido presente una determinada consistencia. El ajuste del botón para lograr el punto de molido deseado representará la señal de entrada del sistema, mientras que el grado de molido logrado será lo que denominaremos salida del sistema. Si el molido no es satisfactorio, a causa de las condiciones propias del café, esta condición no se puede alterar automáticamente en el tiempo en que se está moliendo. En este caso la señal de salida no tiene influencia sobre la señal de entrada.

Un **proceso** es cualquier sistema tal que sus propiedades varían con el tiempo. El estudio de procesos químicos, mecánicos, electrónicos, etc., generalmente se basa en analizar la respuesta obtenida del sistema cuando se modifica alguna de las magnitudes que intervienen en los mismos.

En el proceso se distinguen dos tipos de magnitudes: las “controladoras” o “conductoras” del proceso, y las que manifiestan cómo “responde” el proceso ante la actuación de las que controlan. Un proceso de control de estas características generalmente se modeliza matemáticamente utilizando ecuaciones diferenciales. A este modelo matemático se le denomina *sistema dinámico*.

4.2. Sistema dinámico lineal invariante en tiempo continuo

Definición 4.1 Un sistema dinámico lineal invariante en tiempo continuo está formado por un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes de primer orden, y un sistema de p ecuaciones algebraicas de la forma

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, y donde

- $u(t)$ se denomina variable de “entrada” del sistema, y representa a las magnitudes que controlan, es decir, a cualquier estímulo que le llega al sistema desde una fuente externa.
- $x(t)$ se denomina variable de “estado” del sistema, y representa a magnitudes que intervienen en el proceso interno del sistema.
- $y(t)$ se denomina variable de “salida” del sistema, y representa a las magnitudes que miden la respuesta del proceso.

La ecuación

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

se denomina **ecuación de estado**, y la ecuación

$$y(t) = Cx(t),$$

ecuación de salida.

En general, cuando el sistema dinámico está representado por la expresión (4.1), se dice que el sistema viene dado en su forma **espacio-estado**.

En ocasiones la variable $y(t)$ que nos proporciona la respuesta medible del sistema no es más que el propio estado, $x(t)$, con lo que la segunda ecuación se puede obviar, y el sistema dinámico se modeliza mediante una ecuación de la forma

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t).$$

El modelo más sencillo corresponderá al caso en que las variables son escalares, reduciéndose el problema a una ecuación diferencial de primer orden lineal de coeficientes constantes.

A continuación, presentamos algunos ejemplos de procesos de control que se modelizan matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales, es decir, constituyen sistemas dinámicos de control.

Ejemplo 4.1 Sea un pistón hidráulico de área A y consideremos un fluido incompresible que al entrar en el tubo produce un desplazamiento del pistón.

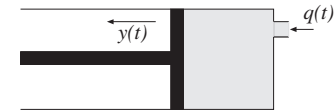


Fig. 4.1. - Pistón.

Denotaremos por $q(t)$ la variable que mide el caudal de fluido que entra al tubo y por $y(t)$ el desplazamiento que sufre el pistón. La relación entre estas variables es

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q(t)}{A}.$$

El sistema dinámico viene dado por esta ecuación diferencial donde $q(t)$ es la variable de entrada y el desplazamiento, $y(t)$, es la variable de salida.

Ejemplo 4.2 Sea un tanque que contiene un líquido cuya altura medimos con la variable $h(t)$. Supongamos que en el tanque entra un caudal de líquido dado por $q(t)$ y por un desagüe se pierde un caudal de líquido, $q_s(t)$, que viene dado por $q_s(t) = \frac{h(t)}{R}$, donde R es la constante de resistencia.

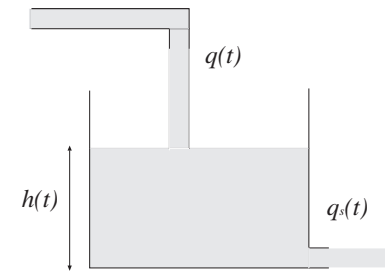


Fig. 4.2. - Tanque.

En este proceso tomamos como variable de entrada $q(t)$ y como variable de salida, la altura del líquido en cada instante t , $h(t)$. El proceso dinámico viene modelizado por la ecuación diferencial

$$A \frac{dh}{dt} + \frac{h}{R} = q(t),$$

siendo A el área de la sección del tanque.

Ejemplo 4.3 Consideremos el proceso dinámico que tiene lugar en un termómetro. Denotamos por $T_a(t)$ la temperatura ambiente, y por $T(t)$ la temperatura del mercurio en el termómetro en cada instante t . Sea m la masa del mercurio, k el coeficiente de transferencia de calor y c_e la constante de calor específico. La relación obtenida es

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k}{mc_e}(T_a(t) - T(t)),$$

donde la variable de entrada es $T_a(t)$ y la variable de salida $T(t)$.

Para analizar el comportamiento de un determinado sistema, se parte de unas condiciones iniciales (un estado inicial x_0 en un instante inicial t_0), $x(t_0) = x_0$ y, a partir de ese punto inicial, se estudia la salida, $y(t)$, obtenida en instantes posteriores, $t \geq t_0$. Así pues, el sistema dinámico siempre va acompañado de las condiciones iniciales de partida que, generalmente, las tomaremos nulas.

4.2.1. Sistemas representados por una ecuación diferencial de orden n

a) A veces, al modelizar un proceso se obtiene una ecuación diferencial lineal de orden n y de coeficientes constantes, del tipo

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = u(t),$$

con $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$. Como es conocido, utilizando variables auxiliares (variables de estado) esta ecuación diferencial de orden n se puede escribir como un sistema de primer orden de n ecuaciones diferenciales. Llamando,

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= y' \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)}, \end{aligned}$$

obtenemos el siguiente sistema matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Este sistema tiene la estructura general de un sistema dinámico lineal invariante, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0],$$

Ejemplo 4.4 Sea un sistema de vasos comunicantes que contiene un cierto líquido. Le aplicamos una presión, $P(t)$, en uno de ellos, lo que produce un desplazamiento del líquido, $h(t)$, en el otro.

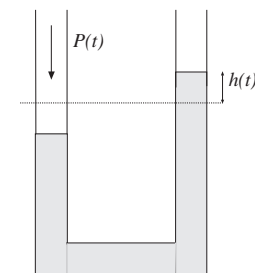


Fig. 4.3. - Vasos comunicantes.

La ecuación diferencial que rige este sistema es la siguiente:

$$A(P - 2h\gamma) - RA \frac{dh}{dt} = Al\gamma \frac{d^2h}{dt^2},$$

o sea,

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{R}{\gamma} \frac{dh}{dt} + 2h = \frac{P}{\gamma},$$

donde A es el área de la sección del tubo, l es la longitud del líquido en el tubo y γ es el peso específico del líquido.

Haciendo $x_1(t) = h(t)$, $x_2(t) = h'(t)$, obtenemos la expresión matricial del sistema

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\frac{R}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} P,$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

En este sistema lineal tenemos la variable de entrada escalar $P(t)$, la variable de estado vectorial $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y la salida escalar $y = x_1 = h(t)$.

b) Un caso más general que el anterior será cuando se tiene una ecuación diferencial de orden n lineal de coeficientes constantes pero en la que además de la entrada $u(t)$ aparecen también las derivadas de $u(t)$, hasta lo sumo de orden $n - 1$. Será una ecuación del tipo,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} u' + b_n u.$$

Tomando ciertas variables auxiliares, podemos obtener representaciones matriciales. Por ejemplo, esta ecuación se puede escribir como el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

4.3. Estudio de la solución de un sistema continuo

4.3.1. Método matricial

Un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo se ha definido como un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Por tanto, dada una función de entrada o de excitación del sistema, $u(t)$, obtener la respuesta del sistema dinámico, es decir, encontrar la función de salida, $y(t)$, no es más que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido para esa determinada entrada, $u(t)$, con unas condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$.

Supongamos el caso escalar con $y(t) = x(t)$. El sistema dinámico viene dado por una ecuación diferencial de primer orden lineal de coeficientes constantes

$$x'(t) = ax(t) + bu(t), \text{ con } a, b \in \mathbb{R},$$

y consideremos la condición inicial $x(0) = 0$.

Para integrar esta ecuación podemos utilizar el factor integrante $\mu(t) = e^{-at}$, con lo que la ecuación queda de la forma

$$\begin{aligned} e^{-at} x'(t) - a e^{-at} x(t) &= b e^{-at} u(t), \\ \frac{d}{dt}(e^{-at} x(t)) &= b e^{-at} u(t). \end{aligned}$$

Integrando entre t_0 y t , y teniendo en cuenta la condición inicial tendremos

$$x(t) = e^{at} \left(\int_{t_0}^t b e^{-a\tau} u(\tau) d\tau \right). \quad (4.2)$$

En el caso matricial,

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

se necesita trabajar con la matriz exponencial e^{At} , que se define mediante un desarrollo en serie

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \dots,$$

convergente para todo $t \in \mathbb{R}$. Se puede demostrar que esta función matricial es derivable y su derivada viene dada por $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$.

Si tomamos $w(t) = e^{-At}x(t)$ y derivamos, tendremos

$$w'(t) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}x'(t),$$

y sustituyendo $x'(t)$ de acuerdo con la primera ecuación del sistema dinámico, obtenemos,

$$w'(t) = e^{-At}Bu(t).$$

Integrando entre t_0 y t , tenemos

$$w(t) - w(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau,$$

$$e^{-At}x(t) = e^{-At_0}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau.$$

De aquí obtenemos el estado del sistema,

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau,$$

donde $x(t_0) = x_0$. Y sustituyendo en la segunda ecuación tenemos la solución o salida del sistema dinámico

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau,$$

A veces el cálculo de la solución por este método resulta excesivamente largo y algo complicado, por ello es más usual trabajar utilizando la transformada de Laplace, que simplifica el problema.

4.3.2. Método de la Transformada de Laplace. Función paso de Heaviside

Si consideramos el sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

con condiciones iniciales en el instante $t = 0$, $x(0) = x_0$, aplicando la transformada de Laplace, obtenemos

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}[x] - x_0 &= A\mathcal{L}[x] + B\mathcal{L}[u], \\ \mathcal{L}[y] &= C\mathcal{L}[x]. \end{aligned}$$

Operando en la primera ecuación,

$$\mathcal{L}[x] = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}B\mathcal{L}[u],$$

y sustituyendo en la segunda,

$$\mathcal{L}[y] = C(sI - A)^{-1}x_0 + C(sI - A)^{-1}B\mathcal{L}[u].$$

Ahora bastaría tomar la transformada de Laplace inversa para obtener la respuesta del sistema dinámico.

Por otra parte, el uso de la transformada de Laplace resulta de gran utilidad en la resolución de sistemas dinámicos debido a que en numerosas aplicaciones de la ingeniería las funciones de entrada a las que está sometido el proceso son funciones continuas a trozos. (Un ejemplo clásico aparece al considerar la señal resultante a partir de un interruptor en sus posiciones de encendido/apagado). En tal caso, resulta útil escribir la función de entrada mediante la llamada función de Heaviside y luego aplicar la transformada de Laplace para resolver el problema.

La función **paso unidad de Heaviside** se define como

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases},$$

o bien, si el salto unidad se produce en el instante $t = a$,

$$H(t - a) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases},$$

es decir,

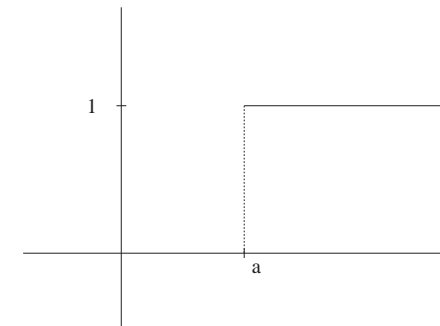


Fig.- 4.4.- Función paso de Heaviside, $H(t - a)$.

Si $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$ es una función de control, la función

$$u(t)H(t-a) = \begin{cases} u(t) & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases},$$

representa a la función que vale cero hasta $t = a$ y a partir de este valor, es igual a $u(t)$. En general si $u(t)$ es una función continua a trozos, definida por

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & 0 \leq t < t_1 \\ u_2(t) & t_1 \leq t < t_2 \\ u_3(t) & t_2 \leq t < t_3 \\ u_4(t) & t \geq t_3 \end{cases},$$

podemos expresarla mediante la función paso unidad de Heaviside $H(t)$, de la siguiente forma

$$u(t) = u_1(t)H(t) + [u_2(t) - u_1(t)]H(t - t_1) + [u_3(t) - u_2(t)]H(t - t_2) + [u_4(t) - u_3(t)]H(t - t_3).$$

O bien, si tenemos en cuenta que

$$H(t-a) - H(t-b) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & a \leq t < b \\ 0 & t \geq b \end{cases},$$

tendremos,

$$u(t) = u_1(t)[H(t) - H(t - t_1)] + u_2(t)[H(t - t_1) - H(t - t_2)] + u_3(t)[H(t - t_2) - H(t - t_3)] + u_4(t)H(t - t_3).$$

Ejemplo 4.5 Escribir mediante la función de Heaviside, la función de control,

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 1 \\ 2-t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}.$$

Aplicando lo expuesto anteriormente,

$$\begin{aligned} u(t) &= tH(t) + (2-t-t)H(t-1) - (2-t)H(t-2) = \\ &= t[H(t) - H(t-1)] + (2-t)[H(t-1) - H(t-2)]. \end{aligned}$$

Si ahora queremos estudiar la transformada de Laplace de una función continua a trozos, es suficiente tener en cuenta la propiedad de translación en la variable t de la transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}[f(t-a)H(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)].$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.6 Calcular la transformada de Laplace de la función $u(t)$ del ejemplo anterior.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u] &= \mathcal{L}[tH(t)] - 2\mathcal{L}[(t-1)H(t-1)] + \mathcal{L}[(t-2)H(t-2)] \\ &= \mathcal{L}[t] - 2e^{-s}\mathcal{L}[t] + e^{-2s}\mathcal{L}[t] \\ &= \frac{1}{s^2}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}). \end{aligned}$$

Como aplicación de todo lo expuesto anteriormente vamos a considerar ejemplos de sistemas dinámicos lineales invariantes en tiempo continuo donde la señal de entrada o control que actúa en el proceso es continua a trozos. Vamos a obtener la salida o respuesta del sistema por el método clásico de resolución de una ecuación diferencial lineal y por el método de la transformada de Laplace.

Ejemplo 4.7 Consideremos el Ejemplo 4.2. Si tomamos la condición inicial $h(0) = 0$ y le aplicamos al sistema una entrada escalón

$$q(t) = kH(t), \text{ con } k > 0, \quad H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases},$$

obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{dh}{dt} + \frac{h}{AR} = \frac{kH(t)}{A},$$

y usando (4.2):

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-\frac{t}{AR}} \left(\int_0^t e^{\frac{\tau}{AR}} \frac{k}{A} H(\tau) d\tau \right) = \\ &= kR \left(1 - e^{-\frac{t}{AR}} \right). \end{aligned}$$

Pasaremos ahora a resolver el problema aplicando la transformada de Laplace. Partimos de

$$\frac{dh}{dt} + \frac{1}{AR}h = \frac{k}{A}H(t).$$

Tomando la transformada de Laplace, obtenemos

$$s\mathcal{L}[h] + \frac{1}{AR}\mathcal{L}[h] = \frac{K}{A} \frac{1}{s} ,$$

o sea,

$$\mathcal{L}[h] = \frac{k}{A} \frac{1}{s(s + \frac{1}{AR})} = \frac{kR}{s} - \frac{kR}{s + \frac{1}{AR}} ,$$

y, por tanto,

$$h(t) = KR(1 - e^{-\frac{t}{AR}}) .$$

Ejemplo 4.8 Sea el mismo ejemplo anterior (Ejemplo (4.2)) pero con una entrada rampa en un intervalo finito y cero en el resto:

$$q(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases} .$$

Mediante la función entrada escalón unidad $H(t)$, escribiremos $q(t) = t(H(t) - H(t - t_0))$, quedando la ecuación:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{h}{AR} = \frac{t}{A}(H(t) - H(t - t_0)) .$$

Resolviéndola,

$$h(t) = e^{-\frac{t}{AR}} \left(\int_0^t e^{\frac{t}{AR}} \frac{t}{A} (H(t) - H(t - t_0)) dt \right) .$$

Si $0 \leq t < t_0$:

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-\frac{t}{AR}} \left(\int_0^t e^{\frac{t}{AR}} \frac{t}{A} H(t_0 - t) dt \right) = \\ &= e^{-\frac{t}{AR}} \left(Rt e^{\frac{t}{AR}} - AR^2 e^{\frac{t}{AR}} + AR^2 \right) = \\ &= AR^2 \left(\frac{t}{AR} - 1 + e^{-\frac{t}{AR}} \right) . \end{aligned}$$

Si $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-\frac{t}{AR}} \left(\int_0^{t_0} e^{\frac{t}{AR}} \frac{t}{A} dt \right) = \\ &= e^{-\frac{t}{AR}} \left(Rt_0 e^{\frac{t_0}{AR}} - AR^2 e^{\frac{t}{AR}} + AR^2 \right) = \\ &= AR^2 \left(\frac{t_0}{AR} e^{\frac{t_0-t}{AR}} - e^{\frac{t_0-t}{AR}} + e^{-\frac{t}{AR}} \right) . \end{aligned}$$

Resolveremos ahora el problema utilizando la transformada de Laplace. Partimos de

$$\frac{dh}{dt} + \frac{1}{AR}h = \frac{1}{A}t(H(t) - H(t - t_0)) . \quad (4.3)$$

Utilizando la definición, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t(H(t) - H(t - t_0))] &= \mathcal{L}[tH(t) - tH(t - t_0)] = \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-st_0} - \frac{t_0}{s}e^{-st_0} . \end{aligned}$$

Por tanto, tomando la transformada de la ecuación (4.3), obtenemos

$$\mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{(s + \frac{1}{AR})} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-st_0} - \frac{t_0}{s}e^{-st_0} \right) ,$$

y descomponiendo en fracciones simples

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h(t)] &= \frac{AR^2}{s + \frac{1}{AR}} - \frac{A^2R^2}{s} + \frac{AR}{s^2} - \\ &- \left(\frac{AR}{s + \frac{1}{AR}} - \frac{A^2R^2}{s} + \frac{AR}{s^2} \right) e^{-st_0} - \\ &- \left(\frac{AR}{s} - \frac{AR}{s + \frac{1}{AR}} \right) t_0 e^{-st_0} . \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} h(t) &= AR^2 e^{-\frac{t}{AR}} - A^2R^2 - ARt - \\ &- \left(AR^2 e^{-\frac{(t-t_0)}{AR}} - A^2R^2 - AR(t - t_0) \right) H(t - t_0) - \\ &- \left(AR - AR e^{-\frac{(t-t_0)}{AR}} \right) t_0 H(t - t_0) . \end{aligned}$$

Ejemplo 4.9 Consideramos ahora el Ejemplo (4.3) con una entrada exponencial en un intervalo finito y cero en el resto:

$$T_a(t) = \begin{cases} e^t & 0 \leq t < t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases} .$$

Mediante la función entrada escalón unidad, $H(t)$, escribiremos $q(t) = e^t H(t_0 - t)$, $t \geq 0$, quedando la ecuación:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{k}{mc_e}T = \frac{k}{mc_e}e^t(H(t) - H(t_0)) , \quad T(0) = 0 .$$

La solución vendrá dada por

$$T(t) = e^{-\frac{kt}{mc_e}} \left(\int_0^t \frac{k}{mc_e} e^t e^{\frac{kt}{mc_e}} (H(t) - H(t_0)) dt \right).$$

Si $0 \leq t < t_0$:

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{-\frac{kt}{mc_e}} \left(\int_0^t e^{\frac{k}{mc_e}} e^{(1+\frac{k}{mc_e})t} dt \right) = \\ &= \frac{k}{mc_e + k} (e^t - e^{-\frac{kt}{mc_e}}). \end{aligned}$$

Si $t \geq t_0$:

$$T(t) = \frac{ke^{t_0}}{mc_e + k} \left[e^{\frac{k(t_0-t)}{mc_e}} - e^{-(t_0+\frac{k}{mc_e}t)} \right].$$

Resolveremos ahora el problema utilizando la transformada de Laplace. Para ello, partimos de

$$\frac{dT}{dt} + \frac{k}{mc_e} T = \frac{k}{mc_e} e^t (H(t) - H(t_0)) \quad (4.4)$$

Como

$$\mathcal{L}[e^t(H(t) - H(t_0))] = \frac{1}{(1-s)} (e^{(1-s)t_0} - 1) \quad ,$$

la transformada de Laplace de (4.4) queda

$$\mathcal{L}[T] = \frac{k}{mc_e} \frac{1}{\left(s + \frac{k}{mc_e}\right)(1-s)} (e^{(1-s)t_0} - 1) \quad .$$

o sea,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[T] &= \frac{k}{mc_e + k} \left(\frac{1}{s + \frac{k}{mc_e}} - \frac{1}{s-1} \right) e^{t_0} e^{-st_0} - \\ &- \frac{k}{mc_e + k} \left(\frac{1}{s + \frac{k}{mc_e}} - \frac{1}{s-1} \right) \quad . \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} T &= \frac{k}{mc_e + k} \left(e^{-\frac{k}{mc_e}(t-t_0)} - e^{(t-t_0)} \right) e^{t_0} H(t-t_0) - \\ &- \frac{k}{mc_e + k} \left(e^{-\frac{k}{mc_e}t} - e^t \right) \quad . \end{aligned}$$

Ejemplo 4.10 En el Ejemplo (4.4) aplicamos una entrada parabólica en un intervalo finito y nula para el resto de valores de t , es decir: $P(t) = t^2(H(t) - H(t-t_0))$, $t \geq 0$.

Considerando los siguientes valores de los parámetros: $R = 5$, $\gamma = \sqrt{2}$, obtenemos la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{dh}{dt} + 2h = \frac{t^2}{\sqrt{2}} (H(t) - H(t-t_0)) \quad ,$$

con las condiciones iniciales $h(0) = h'(0) = 0$.

La solución de la ecuación homogénea asociada a la anterior viene dada por

$$h_H(t) = C_1 e^{-2\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} \quad .$$

Aplicando el método de variación de las constantes,

$$h(t) = C_1(t) e^{-2\sqrt{2}t} + C_2(t) e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} \quad ,$$

y determinando el valor de las funciones $C_1(t)$ y $C_2(t)$ y utilizando las condiciones iniciales, llegamos a la siguiente solución:

Si $0 \leq t < t_0$:

$$h(t) = \frac{1}{24\sqrt{2}} e^{2\sqrt{2}t} - \frac{4}{3}\sqrt{2} e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} t^2 - \frac{5}{4}t + \frac{21}{8\sqrt{2}} \quad .$$

Si $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{24\sqrt{2}} e^{2\sqrt{2}t} - \frac{4}{3}\sqrt{2} e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} (-t_0^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}t_0 - \frac{1}{4}) e^{2\sqrt{2}(t_0-t)} + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{3} (-t_0^2 - 2\sqrt{2}t_0 + 4) e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(t_0-t)} \quad . \end{aligned}$$

Resolveremos ahora el problema utilizando la transformada de Laplace, para ello, se parte de

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{dh}{dt} + 2h = \frac{1}{\sqrt{2}} t^2 (H(t) - H(t_0)) \quad (4.5)$$

Como

$$\mathcal{L}[t^2(H(t) - H(t_0))] = -t_0^2 \frac{1}{s} e^{-t_0s} - 2t_0 \frac{1}{s^2} e^{-t_0s} - \frac{2}{s^3} e^{-t_0s} + \frac{2}{s^3} \quad ,$$

tomando la transformada de Laplace de (4.5), obtenemos que

$$\mathcal{L}[h] = \frac{1}{\sqrt{2}\left(s^2 + \frac{5}{\sqrt{2}}s + 2\right)} \left(-\left(t_0^2 \frac{1}{s} + 2t_0 \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right) e^{-t_0 s} + \frac{2}{s^3} \right) .$$

Calculando la transformada inversa de Laplace, obtenemos que

$$\begin{aligned} h(t) &= \left(-\frac{t_0^2}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{12}t_0 - \frac{1}{24\sqrt{2}} \right) e^{-2\sqrt{2}(t-t_0)} H(t-t_0) + \\ &+ \left(\frac{2}{3\sqrt{2}}t_0^2 - \frac{4}{3}t_0 - \frac{8}{3\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(t-t_0)} H(t-t_0) + \\ &+ \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}t_0^2 + \frac{5}{4}t_0 - \frac{21}{8\sqrt{2}} \right) H(t-t_0) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(t-t_0)^2 H(t-t_0) + \\ &+ \left(-\frac{t_0}{\sqrt{2}} + \frac{5}{4} \right) (t-t_0) + \frac{1}{24\sqrt{3}} e^{-2\sqrt{2}t} - \\ &- \frac{8}{3\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} + \frac{1}{2\sqrt{3}} t^2 - \frac{5\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} t + \frac{21}{8\sqrt{3}} . \end{aligned}$$

4.4. Función de transferencia: ceros y polos

Consideremos un sistema dinámico lineal definido por una ecuación diferencial del tipo

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = u(t), \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

con condiciones iniciales nulas $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$. Al aplicar la transformada de Laplace a este sistema tendremos

$$s^n \mathcal{L}[y] + a_1 s^{n-1} \mathcal{L}[y] + \dots + a_{n-1} s \mathcal{L}[y] + a_n \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[u],$$

por tanto,

$$\frac{\mathcal{L}[y]}{\mathcal{L}[u]} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = G(s),$$

A esta función $G(s)$ se le denomina **función de transferencia** del sistema (4.6).

En general, si el sistema dinámico lineal invariante en tiempo continuo viene dado por un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (4.7)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, y condición inicial $x(0) = 0$, al aplicarle la transformada de Laplace, tendremos:

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}[x] &= A\mathcal{L}[x] + B\mathcal{L}[u], \\ \mathcal{L}[y] &= C\mathcal{L}[x]. \end{aligned}$$

De la primera ecuación obtenemos

$$\mathcal{L}[x] = (sI - A)^{-1} B\mathcal{L}[u],$$

y sustituyendo en la segunda ecuación,

$$\mathcal{L}[y] = C(sI - A)^{-1} B\mathcal{L}[u].$$

A la función matricial $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ se le denomina **matriz de transferencia** del sistema (4.7).

En el caso particular en que la entrada y la salida sean escalares, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, entonces $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ será una función escalar de variable s , que se puede expresar como un cociente $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$, donde $p(s)$ y $q(s)$ son polinomios en la variable compleja s . Pero en general, $G(s)$ será una matriz cuyos elementos son funciones racionales de variable compleja, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.11 Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \end{aligned}$$

Aplicando transformada de Laplace se llega a que

$$\mathcal{L}[y] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -2 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{L}[u].$$

Obteniendo la siguiente matriz de transferencia,

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s-1)(s-3)} & \frac{s+1}{(s-1)(s-3)} \\ \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}.$$

4.4.1. Ceros y polos

Diremos que α es un **cero** de la función de transferencia si $G(\alpha) = 0$ y diremos que β es un **polo** de $G(s)$ si $\lim_{s \rightarrow \beta} G(s) = \infty$, o sea, si β es una raíz del denominador.

Caso escalar

Tal como hemos dicho, cuando $G(s)$ es una función racional escalar, ésta viene dada por un cociente de polinomios y, por tanto, los polos de $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ serán valores β que anulan el denominador, $q(\beta) = 0$. En el caso particular de un sistema dinámico dado por una ecuación diferencial de orden n , del tipo (4.6), vimos que

$$G(s) = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n},$$

y, por tanto, los **polos** de $G(s)$ serán las raíces de la ecuación:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0.$$

A esta ecuación se le denomina **ecuación característica** del sistema (4.6).

Los ceros de la función de transferencia son las raíces de $p(s)$.

Caso matricial

Cuando consideramos el sistema dinámico (4.7) y su matriz de transferencia $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, como $(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}((sI - A)^T)}{|sI - A|}$, entonces los polos de $G(s)$ serán raíces de la ecuación $|sI - A| = 0$. A esta ecuación se le denomina **ecuación característica** del sistema (4.7). Se tiene pues, que los polos de $G(s)$ se encuentran entre los autovalores de la matriz A .

4.5. Estabilidad de sistemas continuos

4.5.1. Estabilidad asintótica a cero

Una de las propiedades que más interesa en el estudio de un proceso dinámico es su estabilidad.

Cuando se considera un sistema lineal invariante autónomo que no está sometido a controles, o sea, un sistema de la forma

$$x'(t) = Ax(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

se dice que x_0 es un **punto de equilibrio** si $Ax_0 = 0$.

Intuitivamente, se entiende que un punto, x_0 , es un punto de equilibrio si cuando se parte de este estado inicial x_0 la salida obtenida en cualquier instante posterior sigue siendo x_0 .

Observemos que $x_0 = 0$ es siempre un punto de equilibrio, y vamos a estudiar la propiedad de estabilidad asintótica a dicho punto 0.

Definición 4.2 Dado un sistema lineal invariante del tipo

$$x'(t) = Ax(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

diremos que el sistema es **asintóticamente estable a 0** si a partir de cualquier estado inicial, x_0 , la salida obtenida $x(t)$ tiende a cero, cuando t tiende a ∞ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Para caracterizar esta propiedad usando la ecuación característica asociada al sistema consideremos primero el caso en que el sistema lineal invariante viene definido por una ecuación diferencial de orden n lineal de coeficientes constantes.

a) Sistema definido por una ecuación diferencial de orden n .

Sea un sistema lineal invariante sin controles dado por una ecuación diferencial de orden n homogénea de coeficientes constantes

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \quad (4.8)$$

Para analizar la estabilidad asintótica a cero del sistema (4.8) tenemos que estudiar la solución de esta ecuación. Recordemos que si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ con multiplicidades k_1, k_2, \dots, k_l , respectivamente, son las raíces de la ecuación característica

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad ,$$

sabemos que la solución está formada por suma de funciones de la forma

$$C t^q e^{\alpha t}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

siendo $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de la ecuación característica. Como $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = a + ib$, quedan funciones del tipo

$$C_1 t^q e^{at} \cos(bt), \quad C_2 t^q e^{at} \sin(bt), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Las funciones de este tipo tienden a cero, cuando t tiende a ∞ , si la exponencial e^{at} tiende a cero, ya que $\cos(bt)$ y $\sin(bt)$ están acotadas, o sea, si $a < 0$. Por tanto, la solución del sistema tiende a cero si las raíces de la ecuación característica $\alpha = a + ib$ tiene su parte real negativa $\text{Re}(\alpha) = a < 0$.

Si consideramos el sistema lineal invariante con controles definido por

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = u(t), \quad (4.9)$$

sabemos que la solución completa es de la forma $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$, donde $y_H(t)$ es la solución de la ecuación homogénea asociada y $y_P(t)$ una solución particular de la ecuación completa.

Si el sistema sin controles (ec. homogénea) es asintóticamente estable a cero, por definición sabemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} y_H(t) = 0$. Por tanto, para valores suficientemente grandes de t podemos considerar $y_H(t)$ aproximadamente cero, es decir, existe $\tau > 0$ tal que $\forall t \geq \tau$ $y_H(t) \cong 0$, quedando $y(t) = y_H(t) + y_P(t) \cong y_P(t)$. Entonces, se dice que a partir de $t = \tau$ la respuesta del sistema alcanza el estado estacionario.

A continuación, vamos a estudiar cómo se refleja el hecho de que el sistema sin controles sea asintóticamente estable a cero en el estudio del sistema completo. En primer lugar, si aplicamos transformada de Laplace al sistema (4.9) (considerando condiciones nulas), obtenemos

$$\tilde{y}(s) = G(s) \tilde{u}(s),$$

donde

$$G(s) = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}.$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = \tilde{y}(s), \text{ y } \mathcal{L}[u(t)] = \tilde{u}(s).$$

Se observa que los polos de $G(s)$ no son más que las raíces de la ecuación característica que acabamos de estudiar asociada a (4.8) y, por tanto, podemos afirmar que el sistema (4.8) es asintóticamente estable si los polos de la función de transferencia $G(s)$ tienen parte real negativa. Es decir, los polos de $G(s)$ están situados en el semiplano abierto izquierdo del plano complejo.

Si consideramos esta condición, $G(s)$ se descompone en fracciones simples del tipo $\frac{As + B}{[(s - a)^2 + b^2]^m}$, $m \geq 1$, cuya transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{As + B}{[(s - a)^2 + b^2]^m} \right],$$

está formada por términos de la forma

$$C_1 t^q e^{at} \cos(bt), \quad C_2 t^q e^{at} \sin(bt), \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

Como $\tilde{y}(s) = G(s) \tilde{u}(s)$, al aplicar la transformada de Laplace inversa para obtener la salida $y(t)$, nos queda

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \tilde{u}(s)] = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau, \quad (4.11)$$

donde hemos aplicado la propiedad del producto de convolución, siendo

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{u}(s)], \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)].$$

Se puede demostrar, que si $G(s)$ tiene todos sus polos con parte real negativa (asintóticamente estable), es decir, $g(t)$ está formada por sumandos del tipo (4.10), con $a < 0$, entonces, si aplicamos entradas acotadas, $|u(t)| < M$, la salida $y(t)$ obtenida por (4.11) es también acotada. Esta propiedad es de gran interés a la hora de diseñar un gran número de dispositivos.

A continuación, presentamos un ejemplo donde el sistema no es asintóticamente estable y, por tanto, entradas acotadas no producen salidas acotadas.

Ejemplo 4.12 Dado un sistema cuya función de transferencia es de la forma $G(s) = \frac{c}{s}$. Tiene como polo $\alpha = 0$, por tanto, el sistema no es asintóticamente estable. Además

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{c}{s} \right] = cH(t),$$

donde $H(t)$ es la función paso de Heaviside.

Si consideramos una entrada acotada, por ejemplo,

$$u(t) = k H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ k & t \geq 0 \end{cases},$$

entonces su transformada de Laplace será $\mathcal{L}[u(t)] = \tilde{u}(s) = \frac{k}{s}$ y la salida obtenida del sistema será

$$\tilde{y}(s) = G(s)\tilde{u}(s) = \frac{ck}{s^2},$$

y tomando antitransformada

$$y(t) = ckt, \quad t \geq 0,$$

que no es una función acotada.

b) Sistema definido por un sistema de ecuaciones diferenciales.

Cuando consideramos el caso general en que el sistema viene definido por

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned}$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, vemos que su función de transferencia viene dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

Para analizar el comportamiento asintóticamente estable a cero del sistema sin controles, $x'(t) = Ax(t)$, hay que estudiar sus soluciones, llegando a resultados análogos al caso escalar. Se obtiene que el sistema es asintóticamente estable a cero si las raíces de la ecuación característica $|\lambda I - A| = 0$ tienen parte real negativa, o sea, si los polos de $G(s)$ tienen su parte real negativa.

En definitiva, para estudiar la estabilidad de sistemas dinámicos lineales es suficiente estudiar el signo de la parte real de las raíces de un polinomio. En el siguiente apartado estableceremos un criterio con esta finalidad.

4.6. Criterio de Routh-Hurwitz

En primer lugar damos el siguiente resultado.

Teorema 3 Sea $Q(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$ un polinomio de grado n y $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Si todas las raíces de $Q(s) = 0$ tienen parte real negativa o igual a cero, entonces los coeficientes $\{a_i\}_{i=0}^n$ de $Q(s)$ tienen todos el mismo signo.

Demostración.-

En particular probaremos que todos los coeficientes de $Q(s)$ son positivos. Si todas las raíces de $Q(s) = 0$ tienen parte real negativa o igual a cero, es decir, son de la forma $\alpha = -a + ib$, $a \geq 0$, entonces la descomposición de $Q(s)$ estará formada por factores del tipo $(s + a)$ (para raíces reales) y factores del tipo $(s + a)^2 + b^2$ (para raíces con $b \neq 0$), y al ser $a \geq 0$, el producto de estos factores siempre tendrá coeficientes positivos. Por tanto, todos los coeficientes de $Q(s)$ serán positivos.

Además, se observa que si todas las raíces de $Q(s) = 0$ tienen parte real negativa, es decir, son del tipo $\alpha = -a + ib$, con $a > 0$, entonces aparecerán todos los coeficientes de $Q(s)$, es decir, es completo y podemos establecer el siguiente resultado.

Corolario 4.6.1 Si falta algún coeficiente de $Q(s)$ entonces existe al menos alguna raíz de $Q(s)$ cuya parte real no es negativa, es decir es cero o positiva.

A continuación, establecemos el criterio de Routh-Hurwitz para un polinomio de grado 2, para un polinomio de grado 3, y, en general, para un polinomio de grado n .

Teorema 4 Una ecuación algebraica $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$, tiene todas sus raíces con parte real negativa si y sólo si todos los coeficientes a_i son distintos de cero y tienen el mismo signo.

Demostración.-

La condición suficiente ya está demostrada con el teorema anterior. Supongamos ahora que todos los coeficientes de $Q(s)$ tienen el mismo signo. Como las raíces de la ecuación de segundo grado vienen dadas por

$$\alpha = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0},$$

o bien, son números reales negativos o números complejos con la parte real negativa.

Teorema 5 Una ecuación algebraica $a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$, tiene todas sus raíces con parte real negativa si y sólo si todos los coeficientes a_i son distintos de cero, tienen el mismo signo, y además, $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$.

Y, en general, para un polinomio de grado n , se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 6 (Criterio de Routh-Hurwitz) Sea la ecuación algebraica $Q(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$ con $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$ y distintos de cero. Entonces, todas las raíces de $Q(s)$ tienen parte real negativa si y sólo si todos los coeficientes a_i tienen el mismo signo y los siguientes determinantes son positivos,

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\dots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & \dots & a_{2k-n} \end{vmatrix}.$$

Donde los a_i en los determinantes cuyo subíndice sea negativo o mayor que n , se entienden como 0.

4.7. Sistemas en lazo cerrado. Realimentación

Dado un sistema de control lineal sabemos que en el dominio de la frecuencia viene representado por

$$\tilde{y}(s) = G(s)\tilde{u}(s),$$

donde $G(s)$ es la función transferencia. A un sistema de este tipo se le denomina *sistema en lazo abierto*, y se representa como

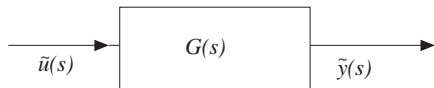


Fig. 4.6.- Sistema en lazo abierto.

Ya hemos comentado que la estabilidad del sistema viene marcada por la posición de los polos de $G(s)$ en el plano \mathbb{C} . Si el sistema no es estable se le puede aplicar una realimentación, que depende de la salida obtenida, de forma que los polos de la función de transferencia, correspondiente al nuevo sistema, sí que satisfagan la condición de estabilidad. Es decir, si realimentamos el sistema con

$$\tilde{u}(s) = \tilde{v}(s) - \tilde{c}(s) = \tilde{v}(s) - H(s)\tilde{y}(s),$$

obtenemos el siguiente sistema en lazo cerrado,

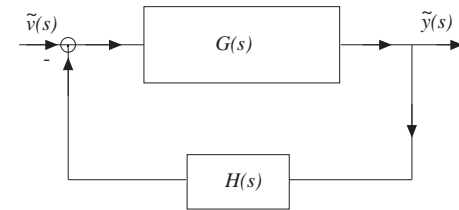


Fig. 4.7.- Sistema en lazo cerrado.

$$\tilde{y}(s) = G(s)\tilde{v}(s) - G(s)H(s)\tilde{y}(s),$$

$$\tilde{y}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}\tilde{v}(s).$$

La función de transferencia en lazo cerrado será

$$G^H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}.$$

Así pues, habrá que elegir la función de transferencia $H(s)$ adecuada para que los polos de $G^H(s)$ cumplan la condición de estabilidad del sistema.

Existen distintos tipos de realimentadores o controladores, $\tilde{c}(s) = H(s)\tilde{y}(s)$, según el tipo de acción básica de control que realice. Estos controladores reciben el nombre de *encendido y apagado*, *proporcional*, *integral*, *proporcional e integral*, *proporcional y derivativo* y *proporcional, derivativo e integral*. Veamos en que consiste cada uno de ellos.

Controlador de encendido y apagado

Si $c(t)$ es la salida del controlador e $y(t)$ su entrada, este controlador funciona de la siguiente forma

$$c(t) = \begin{cases} a & \text{si } y(t) > 0 \\ b & \text{si } y(t) < 0 \end{cases}$$

Controlador proporcional (P)

En este caso se modifica la entrada con un múltiplo de la salida,

$$c(t) = Ky(t).$$

De aquí que la función de transferencia del controlador sea $H(s) = K$.

Controlador integral (I)

Este controlador consiste en realimentar considerando la variación de la entrada por unidad de tiempo proporcional a la salida obtenida,

$$\frac{dc}{dt} = Ky(t) \implies c(t) = K \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

Por tanto, aplicando transformada de Laplace

$$\tilde{c}(s) = \frac{K}{s} \tilde{y}(s), \quad H(s) = \frac{K}{s}.$$

Controlador proporcional e integral (PI)

Este controlador es la suma de un controlador proporcional y otro integral, es decir,

$$c(t) = Ky(t) + \frac{K}{T_i} \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

A la constante K se le llama *ganancia* y a T_i *tiempo integral o retardo*. La función de transferencia será

$$\tilde{c}(s) = H(s)\tilde{y}(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\tilde{y}(s).$$

Controlador proporcional derivativo (PD)

Viene definido por

$$c(t) = Ky(t) + KT_d \frac{dy}{dt},$$

y su función de transferencia será

$$H(s) = K(1 + T_d s).$$

A K se le denomina *ganancia* y a T_d *tiempo derivativo o tiempo de adelanto*.

Controlador proporcional, derivativo e integral (PDI)

Este controlador es la suma de las tres acciones básicas,

$$c(t) = Ky(t) + \frac{K}{T_i} \int_0^t y(\tau) d\tau + KT_d \frac{dy}{dt},$$

y su función de transferencia será de la forma

$$\tilde{c}(s) = H(s)\tilde{y}(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right).$$

Hay que observar que en algunos casos, el tipo de controlador utilizado para realimentar el sistema no sólo modifica los polos de la función de transferencia del sistema inicial, sino que también puede que modifique los ceros. Esto ocurre, por ejemplo, si utilizamos un controlador del tipo integral. Es decir, si $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ es la función de transferencia del sistema, con $p(s)$ y $q(s)$ polinomios, al aplicar

$$\tilde{u}(s) = \tilde{v}(s) - \tilde{c}(s) = \tilde{v}(s) - H(s)\tilde{y}(s),$$

con

$$\tilde{c}(s) = \frac{K}{s} \tilde{y}(s),$$

el sistema en lazo cerrado quedará

$$\tilde{y}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tilde{v}(s)$$

con

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{sp(s)}{sq(s) + Kp(s)}.$$

Se observa que en la función de transferencia en lazo cerrado, además de modificarse el denominador (los polos) se modifica el numerador (los ceros).

Ejemplo 4.13 El sistema de control con función de transferencia $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s-1)}$,

a) ¿El sistema homogéneo es asintóticamente estable?

b) Si realimentamos con un controlador proporcional derivativo, dado por $\tilde{c}(s) = K(1 + T_d s)\tilde{y}(s)$, ¿para qué valores de K y T_d el sistema en lazo cerrado es estable?

Solución.-

a) El sistema no es asintóticamente estable ya que sus polos son $s = -2$ y $s = 1$, y éste último no tiene parte real negativa.

b) La función de transferencia del sistema en lazo cerrado, vendrá dada en este caso por

$$G^H = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{(s+2)(s-1) + K(1+T_d s)} = \frac{1}{s^2 + (1+KT_d)s + (K-2)}$$

Por el criterio de Routh-Hurwitz, el nuevo sistema será asintóticamente estable si los coeficientes del polinomio $s^2 + (1+KT_d)s + (K-2)$ son distintos de cero y tienen el mismo signo. Para ello, K y T_d tendrán que cumplir $K > 2$ y $T_d \geq 0$.

4.8. Ejercicios

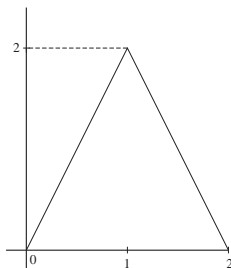
1. Expresar en términos de la función paso la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t^2 & 0 \leq t < 3 \\ t+4 & 3 \leq t < 5 \\ 9 & t \geq 5 \end{cases}$$

2. Calcular la evolución de la salida en un sistema representado por la ecuación diferencial

$$y' + 3y = 2u \quad ,$$

ante la entrada, $u(t)$, dada por la siguiente gráfica



se supondrán condiciones iniciales nulas.

3. Expresar la entrada

$$f(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 4 \\ 2t - 5 & t \geq 4 \end{cases}$$

en términos de la función de Heaviside. Obtener la respuesta del oscilador armónico

$$\ddot{x} + x = f(t) \quad ,$$

sabiendo que $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$.

4. Demostrar que la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{\pi}{2} \\ \text{sen}(t) & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

se puede expresar como $f(t) = \cos(t - \frac{\pi}{2})H(t - \frac{\pi}{2})$. Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = f(t) \quad ,$$

sabiendo que $x(0) = 1$ y $x'(0) = -1$.

5. Escribir en forma de sistema de ecuaciones diferenciales, la ecuación diferencial

$$y''' + 3y'' + 2y' - 4y = e^{-t}$$

y obtener su expresión matricial.

6. Dado el sistema dinámico

$$y'' + 5y' + 6y = 5 \quad ,$$

comprobar que el sistema homogéneo es un sistema asintóticamente estable. Si se dispone de una precisión en las medidas de 10^{-3} , estimar el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el estado estacionario y determinar qué valdrá la solución cuando se alcance dicho estado, supuestas condiciones iniciales nulas para y e y' .

7. Determinar si los siguientes polinomios tienen todas sus raíces con la parte real negativa

- a) $s^5 + 3s^4 + s^3 + 7s^2 - s + 1$,
 b) $s^3 + 6s^2 + 11s + 6$.

8. Dado un sistema dinámico tal que la transformada de Laplace de su salida es

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{s^5 + s^4 + 2s^3 + s^2 + s + 2}$$

mediante el criterio de Routh-Hurwitz determinar si el sistema es o no estable.

9. Dado el sistema dinámico

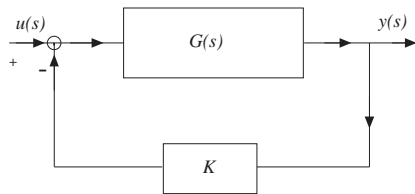
$$y'' - y = 1; y(0) = y'(0) = 0,$$

determinar si el sistema es o no estable. Escribir este sistema de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y obtener la función matricial de transferencia asociada.

10. ¿Es el siguiente sistema estable?

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t).$$

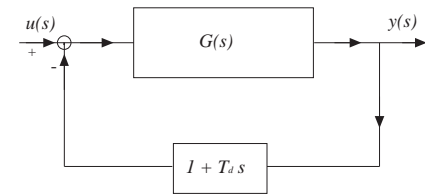
11. Considerar el sistema en lazo cerrado



donde $G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)}$, en las siguientes situaciones:

- En lazo abierto ($K = 0$), ¿el sistema es asintóticamente estable?.
- Escribir la función de transferencia para el sistema en lazo cerrado.
- Discutir para qué valores de K el sistema en lazo cerrado es estable. Confirmar la respuesta con el criterio de Routh-Hurwitz.

12. Considerar



donde el controlador es proporcional derivativo, y

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)}.$$

Determinar el valor crítico de la ganancia, K , para estabilizar el sistema en lazo cerrado.

Capítulo 5

Ecuaciones en diferencias

Hay distintos procesos que, bien por su naturaleza, o bien por la necesidad de utilizar un modelo aproximado para su análisis se modelizan mediante funciones de variables discretas que varían según los números enteros o los números naturales. Las ecuaciones que relacionan este tipo de funciones se denominan *ecuaciones en diferencias*.

Más precisamente, una ecuación en diferencias es una ecuación que relaciona distintos elementos de una o varias sucesiones. Como ejemplos sencillos de este tipo de ecuaciones, se tiene las *progresiones aritméticas*

$$x_n = x_{n-1} + d, \quad n = 1, 2, \dots,$$

cuya solución es de la forma

$$x_n = x_0 + (n - 1)d.$$

Y las *progresiones geométricas*

$$x_n = x_{n-1}r, \quad n = 1, 2, \dots,$$

cuya solución es de la forma

$$x_n = x_0 r^n.$$

En este capítulo estudiaremos algún método para obtener soluciones de ecuaciones en diferencias un poco más complicadas. En particular, estudiaremos ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes, que son ecuaciones en diferencias de la forma

$$x_n + \alpha_1 x_{n-1} + \alpha_2 x_{n-2} + \dots + \alpha_k x_{n-k} = f_n, \quad (5.1)$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, son constantes. Diremos que la ecuación (5.1) es de orden k .

Como ejemplos de este tipo de ecuaciones tenemos

$$a_{n+1} = 3a_n + 7a_{n-1} + 2^n, \quad (\text{orden } 2).$$

$$S_n = S_{n-1} + n^3 - 2n^2 - 3n + 2, \quad (\text{orden } 1).$$

La ecuación homogénea asociada a la ecuación (5.1) es la ecuación

$$x_n + \alpha_1 x_{n-1} + \alpha_2 x_{n-2} + \dots + \alpha_k x_{n-k} = 0. \quad (5.2)$$

Si $f_n \neq 0$ a la ecuación (5.1) se le llama ecuación completa o no homogénea.

Para obtener la solución general de una ecuación en diferencias homogénea, se prueba una solución de la forma $x_n = r^n$, con lo que se obtiene

$$r^n + \alpha_1 r^{n-1} + \alpha_2 r^{n-2} + \dots + \alpha_k r^{n-k} = 0,$$

o sea,

$$r^{n-k} (r^k + \alpha_1 r^{k-1} + \alpha_2 r^{k-2} + \dots + \alpha_k) = 0.$$

Una posible solución de esta ecuación es $r = 0$, lo cual nos proporciona la solución trivial $x_n = 0$. Otra posibilidad es que r sea tal que

$$r^k + \alpha_1 r^{k-1} + \alpha_2 r^{k-2} + \dots + \alpha_k = 0. \quad (5.3)$$

A la ecuación (5.3) se le denomina ecuación característica de la ecuación (5.2).

Si las soluciones de la ecuación característica son:

$$r_1 \text{ con multiplicidad } \beta_1, \dots, r_l \text{ con multiplicidad } \beta_l,$$

la solución general de la ecuación (5.2) es de la forma

$$x_n = (c_{11} + c_{12}n + \dots + c_{1\beta_1} n^{\beta_1-1}) r_1^n + \dots + (c_{l1} + c_{l2}n + \dots + c_{l\beta_l} n^{\beta_l-1}) r_l^n. \quad (5.4)$$

Ejemplo 5.1 Obtener la solución del problema de valores iniciales

$$x_{n+1} = 5x_n - 3x_{n-1} - 9x_{n-2}, \quad x_0 = 6, \quad x_1 = -8, \quad x_2 = -22.$$

Solución.-

La ecuación a resolver es

$$x_{n+1} - 5x_n + 3x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0 ,$$

cuya ecuación característica es de la forma

$$r^3 - 5r^2 + 3r + 9 = 0$$

que se puede factorizar como

$$(r + 1)(r - 3)^2 = 0$$

con lo que se tiene $r = -1$ raíz simple y $r = 3$ raíz doble. Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma

$$x_n = C_1 (-1)^n + C_2 3^n + C_3 n 3^n .$$

Como se cumplen las condiciones

$$\begin{aligned} x_0 &= 6 = C_1 + C_2 , \\ x_1 &= -8 = -C_1 + 3C_2 + 3C_3 , \\ x_2 &= -22 = C_1 + 9C_2 + 18C_3 . \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene $C_1 = 5$, $C_2 = 1$, $C_3 = -2$, luego la solución es de la forma

$$x_n = 5(-1)^n + 3^n - 2n3^n .$$

Ejemplo 5.2 *Obtener la solución general de la ecuación*

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0 .$$

Solución.-

La ecuación característica de la ecuación en diferencias es de la forma

$$r^2 - 2r + 2 = 0 .$$

Las soluciones de esta ecuación son de la forma $r = (1 + i)$ y $r = (1 - i)$. Así, la solución general de la ecuación será de la forma

$$x_n = C_1 (1 + i)^n + C_2 (1 - i)^n =$$

$$\begin{aligned} &= C_1 \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^n + C_2 \left(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^n = \\ &= (\sqrt{2})^n \left(C_1 \left(\cos \left(n\frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(n\frac{\pi}{4} \right) \right) + \right. \\ &+ \left. C_2 \left(\cos \left(n\frac{\pi}{4} \right) - i \operatorname{sen} \left(n\frac{\pi}{4} \right) \right) \right) = \\ &= (\sqrt{2})^n \left((C_1 + C_2) \cos \left(n\frac{\pi}{4} \right) + i (C_1 - C_2) \operatorname{sen} \left(n\frac{\pi}{4} \right) \right) 0 \\ &= (\sqrt{2})^n \left(\tilde{C}_1 \cos \left(n\frac{\pi}{4} \right) + \tilde{C}_2 \operatorname{sen} \left(n\frac{\pi}{4} \right) \right) . \end{aligned}$$

Se puede probar que, de forma análoga a como ocurre en las ecuaciones diferenciales, para obtener una solución general de una ecuación en diferencias completa, basta encontrar la solución general de la ecuación en diferencias homogénea asociada, x_{hn} y una solución particular de la ecuación completa, x_{pn} . Ya que la solución general es

$$x_n = x_{pn} + x_{hn} .$$

Veamos algunos casos en donde es sencillo encontrar una solución particular de una ecuación en diferencias completa.

Ejemplo 5.3 *Encontrar la solución general de la ecuación*

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} + 1 ,$$

Solución.-

Probamos una solución particular constante $x_{pn} = k$. Sustituyendo en la ecuación obtenemos que la solución es $x_{pn} = -\frac{1}{2}$.

La ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$r^2 = r + 2$$

cuyas raíces son $r = -1$, $r = 2$. Así la solución general de la ecuación completa es

$$x_n = -\frac{1}{2} + C_1 (-1)^n + C_2 2^n .$$

Ejemplo 5.4 *Dada la ecuación*

$$x_n - 2x_{n-1} = 3^n ,$$

encontrar su solución general.

Solución.-

La ecuación homogénea es de la forma

$$x_n - 2x_{n-1} = 0 .$$

La ecuación característica es

$$r = 2$$

con lo que $x_{hn} = C2^n$.

Para encontrar una solución particular de la ecuación completa probamos soluciones de la forma

$$x_{pm} = K3^n .$$

Sustituyendo en la ecuación, obtenemos

$$K - \frac{2}{3}K = 1 ,$$

con lo que $x_{pm} = 33^n$, y la solución general de la ecuación es

$$x_n = C2^n + 3^{n+1} .$$

Ejemplo 5.5 *Obtener la solución general de la ecuación*

$$8x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 5 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) .$$

Solución.-

La ecuación homogénea es de la forma

$$8x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0 ,$$

y la ecuación característica tiene como raíces $r = 2$ y $r = 4$, luego la solución general de la ecuación homogénea es de la forma

$$x_{hn} = C_1 4^n + C_2 2^n .$$

Para buscar una solución particular de la ecuación completa se prueba una solución de la forma

$$x_{pm} = A \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) + B \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) .$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} & 8 \left(A \operatorname{sen} \left(\frac{(n+2)\pi}{2} \right) + B \cos \left(\frac{(n+2)\pi}{2} \right) \right) - \\ & - 6 \left(A \operatorname{sen} \left(\frac{(n+1)\pi}{2} \right) + B \cos \left(\frac{(n+1)\pi}{2} \right) \right) = \\ & \left(A \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) + B \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) = 5 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) . \end{aligned}$$

Y haciendo uso de las identidades

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \left(\frac{(n+2)\pi}{2} \right) &= \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} + \pi \right) = -\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) , \\ \cos \left(\frac{(n+2)\pi}{2} \right) &= \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \pi \right) = -\cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) , \\ \operatorname{sen} \left(\frac{(n+1)\pi}{2} \right) &= \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) , \\ \cos \left(\frac{(n+1)\pi}{2} \right) &= \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) , \end{aligned}$$

se obtiene la ecuación

$$(-7A + 6B) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) + (-6A - 7B) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) = 5 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) ,$$

o lo que es lo mismo, el sistema

$$-7A + 6B = 5 , \quad -6A - 7B = 0 .$$

Resolviendo el sistema obtenemos que la solución particular es de la forma

$$x_{pm} = \frac{1}{17} \left(-7 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) + 6 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) .$$

La estabilidad de las ecuaciones en diferencias se define de forma similar a como se hace para las ecuaciones diferenciales. Una ecuación en diferencias es asintóticamente estable a 0, si su solución satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 .$$

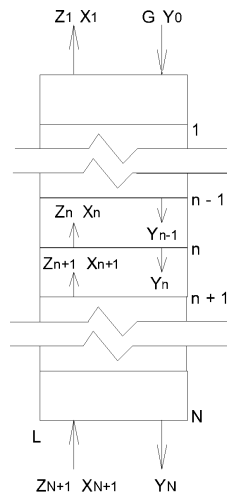
Es fácil comprobar que una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes homogénea cuya ecuación característica tiene todas sus raíces con módulo menor que 1 es asintóticamente estable a 0.

Una ecuación en diferencias completa cuya ecuación homogénea asociada es asintóticamente estable es estable. Esto es, si la función f_n es acotada entonces la solución, x_n , es una función acotada.

5.1. Estudio de una columna de extracción de pisos

En una columna de extracción de pisos que actúa en contracorriente, la composición de los caudales que abandonan un piso difiere en una cantidad finita de la de los caudales que entran en el mismo piso, por lo que en cada etapa tiene lugar un cambio cuantitativo de las composiciones de los caudales. El análisis de estas diferencias se realiza representando matemáticamente el proceso mediante *ecuaciones en diferencias*.

Se considera una mezcla L que contiene una grasa hidrolizable y otras materias inertes. Por el proceso de hidrólisis la grasa se transforma en glicerina. Teniendo en cuenta que la grasa y los inertes son inmiscibles en agua, se quiere extraer la glicerina que se va creando en L utilizando una columna de extracción por pisos. Para ello, se introduce la mezcla L por la base de la columna de pisos y una disolución acuosa G por la parte superior. La disolución acuosa G inicialmente no contiene glicerina, pero en cada plato de la columna de pisos irá absorbiendo parte de la glicerina que se va formando en la mezcla L, y de este modo será posible conseguir una separación de la mezcla.



donde

- x - concentración de glicerina en el refinado.
- y - concentración de glicerina en el extracto.
- z - concentración de grasa en el refinado.
- L - Kg/h de mezcla L que asciende por la columna.
- G - Kg/h de disolución G que desciende por la columna.
- H - Kg de mezcla L retenida en cada etapa.
- w - Kg de grasa necesaria para producir $1 Kg$ de glicerina.
- k - constante de velocidad de la reacción expresada en función de la concentración de grasa.
- N - número total de etapas.

Para plantear un modelo matemático del proceso, se considera la relación de equilibrio entre las concentraciones de glicerina contenidas en A y B en el piso n -ésimo, $y_n = qx_n$, y se realiza un balance de materia para la glicerina que conduce a la siguiente ecuación:

$$y(n+2) - (\alpha + \beta + 1)y(n+1) + \alpha(\beta + 1)y(n) = \gamma, \quad n \geq 0,$$

donde

$$y(0) = 0, \quad y(N) = y_F, \quad \alpha = \frac{qG}{L}, \quad \beta = \frac{kH}{L}, \quad \gamma = \beta(\alpha y_F - \frac{q}{w} z_{N+1}).$$

Por tanto, el análisis de este proceso de extracción se representa mediante una *ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes* con condiciones de contorno, $y(0) = 0$ e $y(N) = y_F$.

Si en particular se consideran los datos:

$$N = 7, \quad y_F = 0,4, \quad \alpha = 7, \quad \beta = 0,1, \quad q = 10,32, \quad k = 10,2, \quad \frac{z_{N+1}}{w} = \frac{9}{10},$$

se llega a la siguiente solución

$$y(n) = -1,08133 + 1,08133 (1,1)^n - 7,59986 \times 10^{-7} 7^n, \quad n \geq 0,$$

cuya gráfica es

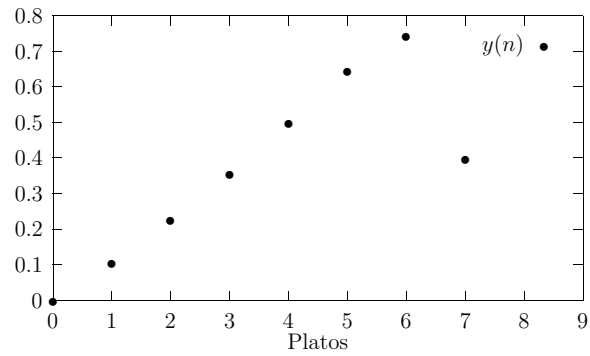


Figura 1.1.- Concentración de glicerina en el extracto.

5.2. Ejercicios

1. Resolver los problemas de valor inicial siguientes:

- 1) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.
- 2) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.
- 3) $a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.
- 4) $a_n = a_n - 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

2. Estudiar el comportamiento asintótico de la solución de los siguientes sistemas discretos, comentando su estabilidad.

- 1) $x_n - x_{n-1} + 0,5x_{n-2} = 0$, $x_0 = 10$, $x_1 = 5$.
- 2) $x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 5$, $x_0 = 1$, $x_1 = 3$.
- 3) $x_n - 2x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1$, $x_0 = 100$, $x_1 = 0$.
- 4) $x_n + x_n - 2 = 2$, $x_0 = 10$, $x_1 = 1$.