



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



# Introducción. Sistemas lineales

Damián Ginestar Peiró

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad Politécnica de Valencia

Curso 2023-2024

- 1 Programa de la asignatura
- 2 Ecuaciones en derivadas parciales
  - Ecuaciones parabólicas
  - Ecuaciones bidimensionales
- 3 Métodos numéricos para la resolución de EDPs
- 4 Diferencias finitas
  - Diferencias finitas para problemas elípticos
  - Diferencias finitas para problemas parabólicos
- 5 Introducción a los elementos finitos
- 6 Ejemplos de matrices
- 7 Motivación e investigación

# Programa de la asignatura

- 1 Introducción. Sistemas lineales.
- 2 Matrices dispersas.
- 3 Métodos directos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- 4 Métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Precondicionadores.

# Sistemas lineales y ecuaciones en derivadas parciales



# Ecuaciones en derivadas parciales

- Ecuación del transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} u = 0$$

Por ejemplo, describe el transporte de un contaminante a lo largo de un canal.

- Ecuación de difusión o ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla^2 u = 0$$

Describe la conducción de calor a través de un medio homogéneo e isótropo.

- Ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = 0$$

Por ejemplo, describe la propagación de ondas transversales de pequeña amplitud en una cuerda elástica.

# Ecuaciones en derivadas parciales

- Ecuaciones de Laplace y de Poisson

$$\nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 u = f$$

Describen el estado estacionario de la ecuación de difusión. Juegan un papel importante en electrostática.

- Ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + rx \frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0$$

Es una ecuación fundamental en finanzas.  $u$  el precio de una opción sobre una acción y  $S$  el precio de la acción,  $\sigma$  la volatilidad y  $r$  la tasa de interés.

- Ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi, \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi$$

que son ecuaciones básicas de la Mecánica Cuántica.

# Ecuaciones en derivadas parciales

- Ecuación de Burger

$$\frac{\partial u}{\partial t} + cu \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + cu \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Describe la evolución del flujo de un fluido unidimensional. También se usa en modelos de tráfico.

- Ecuación de los medios porosos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \vec{\nabla} \cdot (u^\gamma \vec{\nabla} u)$$

con  $k > 0$  y  $\gamma > 1$ . Esta ecuación aparece en la descripción de fenómenos de filtración.

- Ecuación Eikonal

$$|\vec{\nabla} u| = c(x)$$

aparece en óptica geométrica y si  $u$  es su solución, sus superficies de nivel,  $u(x) = t$ , describen la posición de un frente de luz en el tiempo  $t$ .

- Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{0}, & \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Son las ecuaciones básicas de la electrodinámica clásica.

- Ecuaciones de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \nu \nabla^2 \vec{u} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0\end{aligned}$$

Estas ecuaciones describen la evolución de un fluido viscoso homogéneo e incompresible.



# Ecuación del calor

Consideremos un elemento cúbico con uno de sus vértices en el punto  $(x, y, z)$  y cuyas aristas tienen longitudes  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ .

Se introducen las magnitudes

- $T(x, y, z)$  ( $^{\circ}C$ ) La temperatura en el punto  $(x, y, z)$ .
- $q_x(x, y, z)$  ( $W/m^2$ ) El flujo de calor por unidad de superficie transversal al eje X. Análogamente, se introducen  $q_y(x, y, z)$ ,  $q_z(x, y, z)$ , para los ejes Y y Z, respectivamente.
- $Q(x, y, z, t)$ , ( $W/m^{\circ}C$ ) Una fuente de calor.
- $k_x(x, y, z)$ , ( $W/m^{\circ}C$ ). La conductividad térmica del material en la dirección del eje X. Análogamente se introducen  $k_y(x, y, z)$ ,  $k_z(x, y, z)$ , para los ejes Y y Z.
- $\rho(x, y, z)$ , ( $Kg/m^3$ ). La densidad del material.
- $c(x, y, z)$  ( $J/Kg^{\circ}C$ ). El calor específico del material.

El balance de energía en el elemento será

$$\begin{aligned}\Delta E &= (q_x(x, y, z, t) - q_x(x + \Delta x, y, z, t)) \Delta y \Delta z \Delta t \\ &+ (q_y(x, y, z, t) - q_y(x, y + \Delta y, z, t)) \Delta x \Delta z \Delta t \\ &+ (q_z(x, y, z, t) - q_z(x, y, z + \Delta z, t)) \Delta x \Delta y \Delta t \\ &+ Q(x, y, z, t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t.\end{aligned}$$

La energía generada o perdida en el elemento se usa en calentarlo o enfriarlo, por tanto,

$$\Delta E = \rho(x, y, z) c(x, y, z) (T(x, y, z, t + \Delta t) - T(x, y, z, t)) \Delta x \Delta y \Delta z .$$

Desarrollando en serie de Taylor alrededor del punto  $(x, y, z)$  y tomando el límite cuando  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  y  $\Delta t$  tienden a cero, se llega a que

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} .$$

Por Ley de Fourier se tiene que

$$q_x = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} , \quad q_y = -k_y \frac{\partial T}{\partial y} , \quad q_z = -k_z \frac{\partial T}{\partial z} ,$$

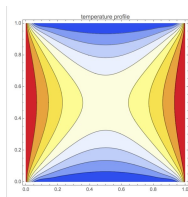
# Ecuación del calor

y, por tanto, se tiene **la ecuación del calor**, que es de la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

En caso que  $\rho$ ,  $c$ ,  $k_x = k_y = k_z$  sean constantes, la ecuación del calor se escribe de la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T + \tilde{Q} .$$



# Ecuación del calor sin fuentes

El problema más sencillo, donde se considera que no hay fuentes de calor y las condiciones de contorno son homogéneas.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

con las condiciones de contorno

$$T(0, t) = 0, \quad T(l, t) = 0,$$

y la condición inicial

$$T(x, 0) = g(x).$$

# Ecuación del calor sin fuentes

Método de separación de variables, buscando soluciones de la forma

$$T(x, t) = X(x)P(t) .$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación

$$\frac{P'(t)}{a^2 P(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda ,$$

o sea,

$$\begin{aligned} P'(t) + a^2 \lambda P(t) &= 0 , \\ X'' + \lambda X(x) &= 0 . \end{aligned}$$

Condiciones de contorno

$$X(0) = 0 , \quad X(l) = 0 .$$

# Ecuación del calor sin fuentes

Se tienen los autovalores

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots,$$

y las autofunciones

$$X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

La parte temporal queda de la forma

$$P'_n + a^2\lambda_n P_n = 0,$$

cuya solución es de la forma

$$P_n(t) = a_n e^{-a^2\lambda_n t} = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}.$$

# Ecuación del calor sin fuentes

La solución del problema se escribirá de la forma

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) .$$

Como se ha de satisfacer la condición inicial, se cumplirá

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) ,$$

y, utilizando la propiedad de ortogonalidad de las funciones seno

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx .$$



# Ecuaciones elípticas

La ecuación elíptica más simple es la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 .$$

aparece en problemas de gravitación y de electrostática, para describir el potencial de velocidades de un fluido no turbulento, para describir la distribución estacionaria de temperaturas, etc.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

Otra ecuación elíptica muy usual es **la ecuación de Poisson**,

$$\nabla^2 u = Q ,$$

que aparece en problemas estacionarios con fuentes.

Si se pretende resolver las ecuaciones en un recinto finito,  $\Omega$ , será necesario tener unas condiciones de contorno, que pueden ser de la forma:

- 1  $u(\vec{x}) = f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \Sigma$ , siendo  $\Sigma$  la frontera de  $\Omega$ . Este problema se conoce como un **problema de Dirichlet o primer problema de contorno**.
- 2  $\vec{n} \vec{\nabla} u = g(\vec{x})$ , siendo  $\vec{n}$  un vector unitario normal a la superficie  $\Sigma$ . A este problema se le llama **problema de Neumann o segundo problema de contorno**.
- 3  $\vec{n} \vec{\nabla} u + \alpha u = h(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \Sigma$ . A este problema se le llama **problema mixto o tercer problema de contorno**.

# Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

La ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 ,$$

sobre un rectángulo de aristas  $(a, b, c)$ , suponiendo que se tienen condiciones de frontera de la forma

$$u(0, y, z) = u(a, y, z) = u(x, 0, z) = u(x, b, z) = u(x, y, 0) = 0 ,$$

$$\text{y } u(x, y, c) = V(x, y).$$

# Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

Separación de variables,

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) .$$

Obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 .$$

Suponemos que

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2$$

con  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .

# Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

se tiene que  $X(x)$ ,  $Y(y)$  y  $Z(z)$  han de cumplir

$$X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = Z(0) = 0 .$$

Por ello, se tienen las soluciones

$$X(x) = \text{sen}(\alpha x)$$

$$Y(y) = \text{sen}(\beta y)$$

$$Z(z) = \text{senh}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z\right)$$

siendo

$$\alpha = \frac{\pi n}{a} , \quad \beta = \frac{\pi m}{b} , \quad n, m \in \mathbb{Z} .$$

# Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

La forma general de la solución buscada es pues

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{m,n} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{n,m} z)$$

siendo

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{a}, \quad \beta_m = \frac{\pi m}{b}, \quad \gamma_{n,m} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}.$$

Haciendo  $u(x, y, c) = V(x, y)$ , se tiene

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{m,n} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{n,m} c),$$

de lo que se tiene que

$$A_{n,m} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{n,m} c)} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y).$$

- Mostraremos distintos métodos numéricos para la aproximación de problemas de contorno. Mientras que en los problemas de valores iniciales las condiciones que determinan la solución del problema se imponen en un mismo punto (condiciones iniciales), en los problemas de contorno las condiciones se imponen en **puntos separados**.
- Para una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y') \quad , \quad a \leq x \leq b \quad ,$$

con las condiciones

$$y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta \quad .$$

Se tiene un problema de la forma

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

El primer paso consistirá en dividir el intervalo  $[a, b]$  en  $N + 1$  subintervalos del mismo tamaño cuyos extremos son los nodos

$$x_i = a + i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, N + 1,$$

siendo  $\Delta x = (b - a)/(N + 1)$ .



# Diferencias finitas

En los nodos interiores se ha de cumplir

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) ,$$

con  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Se hace uso del desarrollo de Taylor

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i + \Delta x) = y(x_i) + \Delta x y'(x_i) \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{2} y''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{6} y'''(x_i) + O(\Delta x^4) . \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} y(x_{i-1}) &= y(x_i - \Delta x) = y(x_i) - \Delta x y'(x_i) \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{2} y''(x_i) - \frac{\Delta x^3}{6} y'''(x_i) + O(\Delta x^4) . \end{aligned}$$

Se tiene

$$y''(x_i) = \frac{1}{\Delta x^2} (y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})) + O(\Delta x^2) ,$$

y

$$y'(x_i) = \frac{1}{2\Delta x} (y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})) + O(\Delta x^2) .$$

En los nodos  $i = 1, \dots, N$ , las ecuaciones

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x^2} = p(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} + q(x_i) y_i + r(x_i) .$$

Condiciones de contorno

$$y_0 = \alpha , \quad y_{N+1} = \beta .$$

# Diferencias finitas

en forma matricial de la forma

$$Ay = b ,$$

donde  $A$  es la matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} 2 + \Delta x^2 q(x_1) & -1 + \frac{\Delta x}{2} p(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ -1 - \frac{\Delta x}{2} p(x_2) & 2 + \Delta x^2 q(x_2) & -1 + \frac{\Delta x}{2} p(x_2) & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 + \frac{\Delta x}{2} p(x_{N-1}) \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 - \frac{\Delta x}{2} p(x_N) & 2 + \Delta x^2 q(x_N) \end{pmatrix} ,$$

y los vectores

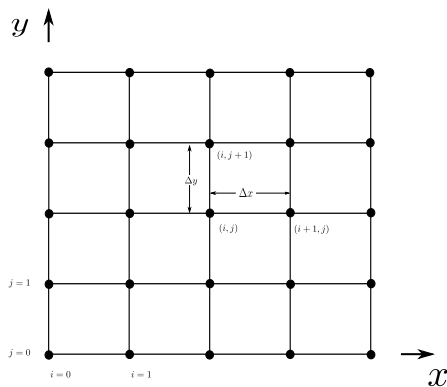
$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} -\Delta x^2 r(x_1) + \left(1 + \frac{\Delta x}{2} p(x_1)\right) \alpha \\ -\Delta x^2 r(x_2) \\ \vdots \\ -\Delta x^2 r(x_{N-1}) \\ -\Delta x^2 r(x_N) + \left(1 - \frac{\Delta x}{2} p(x_N)\right) \beta \end{pmatrix} .$$

Problema de contorno asociado a la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f, \quad (x, y) \in [0, l_1] \times [0, l_2],$$
$$u(x, y) = 0, \quad \text{para } x = 0; x = l_1; y = 0; y = l_2.$$

# Diferencias finitas para problemas elípticos

El primer paso que realizaremos consistirá en discretizar el rectángulo  $[0, l_1] \times [0, l_2]$



$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N + 1,$$

$$y_j = j\Delta y, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M + 1.$$

# Diferencias finitas para problemas elípticos

Se tiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(u_i, u_j) \approx \frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{\Delta x^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(u_i, u_j) \approx \frac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{\Delta y^2},$$

donde  $u_{ij} = u(x_i, y_j)$

La ecuación

$$\frac{1}{\Delta x^2} (u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}) + \frac{1}{\Delta y^2} (u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}) = -f_{ij}.$$

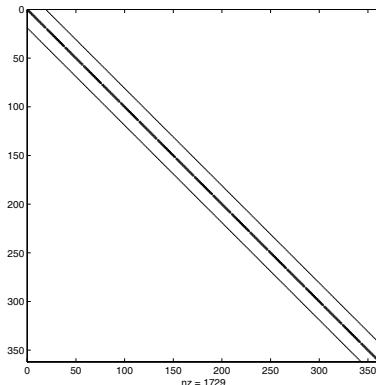
# Diferencias finitas para problemas elípticos

Orden:  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ ,

$$l = i + n(j - 1) .$$

Se obtiene un sistema de ecuaciones de la forma

$$Au = f ,$$



# Diferencias finitas para problemas parabólicos

Consideraremos la ecuación del calor o ecuación de la difusión dependiente del tiempo que consideraremos tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

- Condiciones de contorno
- Distribución espacial de la  $u$  en el instante inicial es conocida.



# Diferencias finitas para problemas parabólicos

- Se discretiza el tiempo y el espacio en intervalos igualmente espaciados,  $t = n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , y  $x = x_0 + i\Delta x$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_x$ .
- Se toma una aproximación para la derivada temporal de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t) .$$

- Para la derivada espacial se toma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) .$$

# Diferencias finitas para problemas parabólicos

Se suele utilizar la notación  $u(n\Delta t, x_0 + i\Delta x) = u_i^n$ , y se escribe la aproximación de la ecuación como

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2},$$

o sea,

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n), \quad r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}.$$

## Método explícito.

Para garantizar la estabilidad del esquema explícito, se puede ver que es necesario que se cumpla la condición

$$0 < \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} < 0.5,$$

que se conoce como **la condición de Courant**, y que limita la longitud del paso temporal que es necesario elegir una vez se ha elegido un paso espacial.

# Diferencias finitas para problemas parabólicos

Para evitar problemas de estabilidad, se puede evaluar la derivada segunda espacial en el instante  $(n + 1)\Delta t$ , en vez de hacerlo en el instante  $n\Delta t$ , obteniendo de este modo la aproximación

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2},$$

o sea,

$$-ru_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r)u_i^{n+1} - ru_{i+1}^{n+1} = u_i^n,$$

que es un **método implícito**.

# Diferencias finitas para problemas parabólicos

Para cada paso de tiempo, se ha de resolver un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{pmatrix} (1+2r) & -r & & & & \\ -r & (1+2r) & -r & & & \\ & & \dots & & & \\ & -r & & (1+2r) & -r & \\ & & & -r & (1+2r) & \\ & & & & & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N_x}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n + ru_0^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N_x}^n + ru_{N_x+1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

# Diferencias finitas para problemas parabólicos

Otro método más preciso es el **método de Crank-Nicolson**

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) .$$

# Introducción a los elementos finitos

Veremos el método de Rayleigh-Ritz que servirá como una breve introducción al método de los **elementos finitos**.

Cosideramos, por ejemplo, la deformación de una viga, que se modeliza de la forma

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

con las condiciones de contorno  $y(0) = y(1) = 0$ .

# Introducción a los elementos finitos

la solución de esta ecuación es la función que minimiza una cierta integral entre todas las funciones del conjunto  $C_0^2[0, 1]$ , definido por

$$C_0^2[0, 1] = \left\{ u \in C^2[0, 1] / u(0) = u(1) = 0 \right\}.$$

Así, una función  $y \in C_0^2[0, 1]$  es la solución del problema de la viga si, y sólo si,  $y$  es la única función que minimiza la integral

$$I(u) = \int_0^1 \left( p(x) (u'(x))^2 + q(x) (u(x))^2 - 2f(x)u(x) \right) dx.$$

# Introducción a los elementos finitos

se eligen ciertas funciones básicas,  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ , que sean linealmente independientes y que verifiquen

$$\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Suponemos que

$$u = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x),$$

y tratamos de obtener las constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , que hacen mínima la integral

$$\begin{aligned} & I \left( \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right) \\ &= \int_0^1 \left( p(x) \left( \sum_{i=1}^n c_i \phi_i'(x) \right)^2 + q(x) \left( \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right)^2 - 2f(x) \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right) dx. \end{aligned}$$



Derivando e igualando a cero, se obtienen las ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \left( p(x) \phi_i'(x) \phi_j'(x) + q(x) \phi_i(x) \phi_j(x) \right) dx \right) c_i - \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx = 0,$$

para  $j = 1, 2, \dots, n$ . Estas ecuaciones dan lugar a un sistema de ecuaciones lineales

$$A\vec{c} = \vec{b},$$

donde  $A$  es una matriz simétrica cuyos elementos son de la forma

# Introducción a los elementos finitos

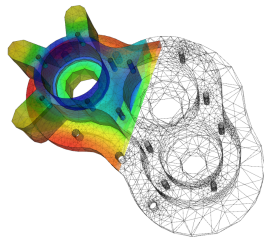
$$a_{ij} = \int_0^1 \left( p(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x) \right) dx,$$

y las coordenadas del vector  $b$  son

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x) dx.$$

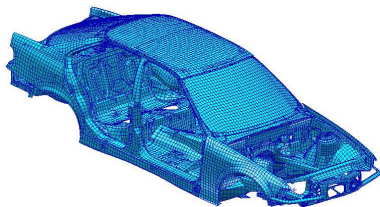
La solución de este sistema nos da los coeficientes  $c_i$  que permiten reconstruir la solución aproximada.

Se pueden generalizar estas ideas para dominios bidimensionales y tridimensionales usando elementos triangulares o cuadrangulares.



# Ejemplos de matrices

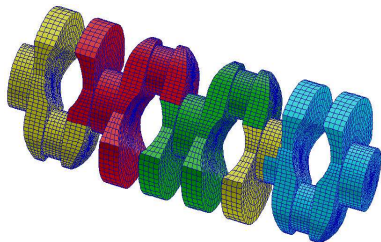
Problemas más complejos como el análisis estructural, o el estudio de la dinámica de fluidos computacional utilizan técnicas de discretización de las ecuaciones como **los volúmenes finitos o los elementos finitos**.



## Estructura de un coche

227362 incógnitas

5757996 elementos no nulos



## Cigüeñal de un coche

148770 incógnitas

5396386 elementos no nulos

# Investigación



## Investigación en Álgebra lineal numérica

- Álgebra lineal numérica en la UPV. Construcción de preconditionadores:
  - A bloques.
  - Inversas aproximadas (Sherman-Morrison).
  - Precondicionadores polinomiales.
  - Precondicionadores 'matrix-free'.
  - Optimización del cálculo de autovalores.
  - Resolución de sistemas a bloques.

- **Computación de alto rendimiento:** Desarrollo de algoritmos y herramientas para cálculos eficientes de álgebra lineal en sistemas paralelos y distribuidos a gran escala, incluidos procesadores multinúcleo, GPU y arquitecturas heterogéneas.
- **Cálculos tensoriales:** La investigación en esta área implica el desarrollo de algoritmos, modelos y métodos computacionales para matrices multidimensionales (tensores). Los tensores han sido objeto de gran atención debido a sus aplicaciones en áreas como el aprendizaje automático, la ciencia de datos y la computación cuántica.

- **Algoritmos aleatorios:** Los algoritmos aleatorios de álgebra lineal han ido ganando terreno, ya que proporcionan soluciones rápidas y aproximadas a los problemas. Estos algoritmos suelen tener una complejidad computacional menor que sus homólogos deterministas y tienen aplicaciones en el aprendizaje automático, el procesamiento de señales y el análisis de datos.
- **Álgebra lineal numérica para el aprendizaje automático:** A medida que el aprendizaje automático y la inteligencia artificial continúan creciendo, los investigadores están desarrollando algoritmos y técnicas de álgebra lineal más eficientes para abordar los desafíos computacionales del procesamiento de datos a gran escala y el aprendizaje profundo.



- **Álgebra lineal basada en grafos:** Los grafos pueden representarse como matrices, y pueden aplicarse técnicas de álgebra lineal para analizar las propiedades de los grafos. La investigación en esta área incluye el desarrollo de algoritmos para la sparsificación de grafos, la agrupación espectral y el procesamiento de señales de grafos.
- **Computación cuántica y álgebra lineal:** La computación cuántica ofrece un paradigma computacional diferente que podría revolucionar muchas áreas de la ciencia y la tecnología. El álgebra lineal desempeña un papel crucial en el desarrollo de algoritmos cuánticos y el estudio de los sistemas cuánticos.