Máster en Materiales y Sistemas Sensores para Tecnologías Medioambientales (Erasmus Mundus)

NOTAS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Damián Ginestar Peiró

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Capítulo 1

Matrices

1.1. Definiciones básicas

Definicion 1.1 *Se llama matriz de tamaño $m \times n$ a un conjunto de $m \times n$ números escritos formando un rectángulo de m filas y n columnas. Cada número es un elemento de la matriz.*

Ejemplo 1.1 *Ejemplos de matrices son*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \ ,$$

Se tiene que A es una matriz 2×3 y se suele escribir que $A \in \mathbb{R}^{2\times3}$. B es una matriz 3×2 y decimos que $B \in \mathbb{R}^{3\times2}$.

En general, una matriz $m \times n$ se representa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \ .$$

A un elemento genérico de A se le representa por a_{ij}, donde i indica el número de fila y j indica el número de columna.

Definicion 1.2 *Dos matrices A y B son iguales si tienen el mismo tamaño y sus elementos son iguales.*

Hay matrices que suelen aparecer en muchas situaciones y que tienen nombres especiales, así

- Se llama *matriz cuadrada* a una matriz con el mismo número de filas que de columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \ .$$

  A los elementos a_{ii} de A se les llama *diagonal principal* de A.

- A las matrices de tamaño $1 \times n$ se les llama *matrices fila.*

- A las matrices de tamaño $m \times 1$ se les llama *matrices columna.*

- Se llama *matriz nula* a una matriz que tiene todos sus elementos iguales a 0. Se suele representar por O.

- Se llama *matriz identidad* a una matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal valen 1 y los que no están en la diagonal principal valen 0.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \ .$$

- Diremos que una matriz es diagonal si cumple que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

- Llamaremos *matriz triangular superior* a una matriz A que satisface $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Llamaremos *matriz triangular inferior* a una matriz A que satisface

$a_{ij} = 0$ para $i < j$.

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & a_{mm} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definicion 1.3 *Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, llamaremos matriz transpuesta de A a una matriz $A^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$, cuyos elementos cumplen $\left(a^T\right)_{ij} = a_{ji}$.*

Ejemplo 1.2 *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ ,$$

su transpuesta es

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Se cumple que $\left(A^T\right)^T = A$.

Definicion 1.4 *Diremos que una matriz cuadrada, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es simétrica, si se satisface que $A^T = A$.*

Definicion 1.5 *Diremos que una matriz cuadrada, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es antisimétrica, si se satisface que $A^T = -A$.*

1.2. Operaciones con matrices

1.2.1. Suma de matrices

Dadas dos matrices del mismo tamaño, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, se puede definir una suma, que es una nueva matriz $A + B$, cuyos elementos satisfacen

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ .$$

De este modo, cualquier matriz cuadrada, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se puede descomponer como suma de una matriz simétrica más una antisimétrica,

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) \ .$$

1.2.2. Producto por escalares

Dada una matriz, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y un escalar, $\lambda \in \mathbb{R}$, se define el producto λA como la matriz cuyos elementos cumplen

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \ .$$

1.2.3. Propiedades

Conmutativa.

$$(A + B) = (B + A) \ .$$

Asociativa.

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C) \ .$$

Elemento neutro. Si la matriz nula la llamamos O, se cumple

$$A + O = O + A = A \ .$$

Elemento opuesto. Se satisface

$$A + (-A) = (-A) + A = O \ .$$

1.2.4. Producto de matrices

El producto de matrices no está definido para matrices cualesquiera. Para que dos matrices A y B se puedan multiplicar se ha de cumplir que el número de columnas de A sea el mismo que el número de filas de B.

De este modo, dadas $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$, se define el producto

$$(A)_{n\times m}(B)_{m\times p} = (C)_{n\times p} \ ,$$

cuyos elementos cumplen

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \ , \quad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, p \ .$$

Ejemplo 1.3 *Dadas las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ ,$$

su producto es

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \ .$$

Hay que tener en cuenta que, al contrario de lo que ocurre con los números reales o complejos, para las matrices, en general se tiene que

$$AB \neq BA \ .$$

O sea, el producto de matrices no es conmutativo. Si se cumple que $AB = BA$, se dice que A y B conmutan.

Propiedades

Para matrices A, B, y C que se puedan multiplicar, se cumple

Asociativa.

$$ABC = (AB)C = A(BC) \ .$$

Distributiva.

$$A(B + C) = AB + AC \ .$$

Dadas $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$, se cumple

i) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

ii) $(kB)^T = kB^T$.

iii) $(AC)^T = C^T A^T$.

Definicion 1.6 *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, llamaremos matriz inversa de A, si existe, a una matriz A^{-1}, que cumple*

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n \ .$$

1.2.5. Submatrices y bloques

Dada una matriz A, se llaman submatrices de A a aquellas matrices que se obtengan a partir de A eliminando filas o columnas o filas y columnas de A

Ejemplo 1.4 *Dada*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} ,$$

son submatrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} ,$$

Dada una matriz A se llaman cajas o bloques de A a submatrices de A obtenidas eliminando filas, columnas o filas y columnas consecutivas.

Ejemplo 1.5 *La matriz A tiene, por ejemplo los bloques*

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} ,$$

donde

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} , \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} , \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Dadas dos matrices A y B, si se dividen en bloques compatibles con la operación suma, por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} ,$$

se cumplirá

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix} .$$

De igual modo ocurre con el producto. Si A y B se dividen en bloques compatibles para el producto,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} ,$$

se cumplirá

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} .$$

1.3. Matrices complejas

De igual modo a como se definen matrices de números reales, es posible definir matrices de números complejos.

Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ i & 3+2i \end{pmatrix} .$$

- Si A es una matriz compleja de tamaño $n \times m$ se escribe que $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$.
- Dada una matriz A, se llama matriz conjugada de A a la matriz A^*, cuyos elementos cumplen

  $$(A^*)_{ij} = a^*_{ij} .$$

- Dada una matriz A, se llama matriz adjunta de A a la matriz $A^\dagger$, tal que

  $$A^\dagger = \left(A^T\right)^* = (A^*)^T .$$

  Si de cumple que $A = A^\dagger$, se dice que A es autoadjunta o hermítica.

1.4. Ejercicios

1. ¿las matrices siguientes son iguales?

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

2. ¿Dadas dos matrices cuadradas A y B, se cumple siempre la igualdad?

   $$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 .$$

3. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$
hallar la matriz A^n. Comprobar que A cumple
$$A^3 - 3A + 2I = O \ .$$

4. Encontrar el vector columna X, que satisface
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

5. Multiplicar por bloques las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

6. Comprobar si las siguientes matrices son hermíticas
$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2-i & 4+i \\ 2-i & 6 & i \\ 4+i & i & 3 \end{pmatrix} \ , \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 2-3i & -1 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$