

Métodos numéricos para sistemas de ecuaciones

(Prácticas)

Damián Ginestar Peiró



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

UNIVERSTAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Índice general

1. Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales	3
1.1. Problemas unidimensionales	3
1.2. Problemas bidimensionales	6
1.2.1. Problema estacionario	6
1.2.2. Ecuación del calor dependiente del tiempo	10
1.3. Ejercicios	15

Práctica 1

Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales

El MatLab dispone de un ‘toolbox’ completo para el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales. Nosotros aquí sólo veremos algunos métodos sencillos para la integración de estas ecuaciones que, en general, conducen a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

1.1. Problemas unidimensionales

Supongamos que se quiere estudiar el problema de contorno siguiente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2, \quad x \in (0, 10), \quad (1.1)$$

con $u(0) = 0$ y $u(10) = 1$.

Utilizamos una aproximación en diferencias finitas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i) \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2},$$

si utilizamos 11 nodos para la discretización x_0, x_1, \dots, x_{10} , se tiene que $\Delta x = 1$ y la ecuación (1.1) se puede aproximar como

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = -2.$$

Haciendo variar $i = 1, \dots, 9$, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Para resolver este sistema utilizamos las instrucciones siguientes:

```
v1=ones(1,8);
v2=-2*ones(1,9);
A=diag(v2)+diag(v1,-1)+diag(v1,1);
b=-2*ones(9,1);
b(9)=-3;
solu=A\b;
solu=[0;solu;1]
plot(solu,'-o');
```

obteniendo el resultado mostrado en la Figura 1.1.

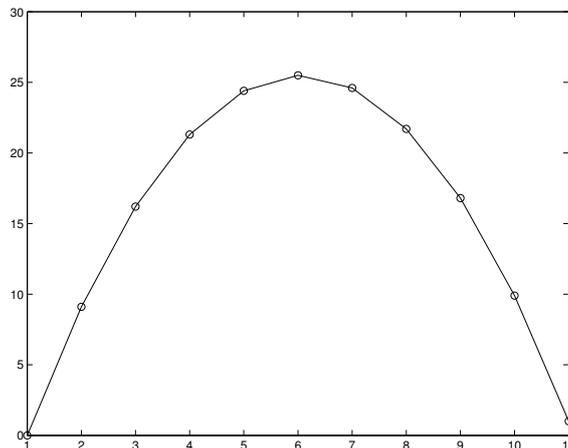


Figura 1.1: Solución del problema de contorno.

Ahora consideraremos un problema dependiente del tiempo. Supongamos que se tiene una barra de longitud 0.5 m que inicialmente se halla a

una temperatura de 25 grados centígrados. El extremo derecho se pone a una temperatura de 100 grados centígrados, mientras que el otro extremo se mantiene a 25 grados. Pretendemos saber cómo evoluciona la temperatura en los distintos puntos de la barra.

Para ello, se hace uso de la ecuación del calor :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; \quad \alpha = 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s} .$$

Utilizamos el método explícito visto en teoría,

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) ,$$

y elegimos $\Delta x = 0.1$, y 6 nodos espaciales. Para que se cumpla la condición de Courant

$$0 < \frac{10^{-2}}{10^{-2}} \Delta t < 0.5 ,$$

tomamos, por ejemplo, $\Delta t = 0.1\text{s}$.

Las siguientes instrucciones de MatLab resuelven el problema, mostrando la solución hasta 100 segundos después de colocar la fuente de calor. La solución se muestra cada 10 segundos y se generan 10 ficheros con las distintas configuraciones para la temperatura en la barra.

```

close all
deltat=0.1;
deltax=0.1;
alpha=1e-2;
u0=25*ones(6,1);
u0(6)=100;
it=1;
pasost=100;
nprint=10;
hold on
for n=1:pasost
    tiempo=n*deltat;
    u(1)=25;
    for i=2:5
        u(i)=u0(i)+alpha*deltat/(deltax^2)*...
            (u0(i-1)-2*u0(i)+u0(i+1));
    end
    u(6)=100;
    if(it==nprint)
        it=0;
        plot(u);
        fichero=['fig',num2str(tiempo),'.pdf'];
    end
end

```

```

        eval(['print_', fichero, '_-dpdf']);
    end
    it=it+1;
    u0=u;
end

```

El formato elegido para generar los ficheros con las gráficas ha sido el 'pdf'. Se puede consultar la ayuda de la función `print()` para generar las figuras con otro formato.

1.2. Problemas bidimensionales

1.2.1. Problema estacionario

Como ejemplo de un problema bidimensional resuelto mediante el método de las diferencias finitas, consideraremos la ecuación de Laplace en un rectángulo con condiciones de contorno de Dirichlet.

La ecuación de Laplace es la ecuación elíptica más sencilla: $\nabla^2\phi = 0$, que formulada en dos dimensiones se convierte en:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in [0, l_x] \times [0, l_y],$$

con las condiciones:

$$\begin{aligned} \phi(0, y) &= \text{sen}\left(\frac{\pi y}{l_y}\right), & \phi(l_x, y) &= \text{sen}\left(\frac{\pi y}{l_y}\right), \\ \phi(x, 0) &= \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l_x}\right), & \phi(x, l_y) &= \text{sen}\left(\frac{\pi x}{l_x}\right). \end{aligned}$$

Si se toman diferencias finitas centradas de segundo orden para puntos dependiendo de i y j llegamos a la ecuación en diferencias siguiente:

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0.$$

Esta ecuación se puede expresar en forma de un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\varphi = b$, donde b es un término independiente que aparece al aplicar las condiciones de contorno y $\varphi_{i,j}$ es la matriz de incógnitas φ expresada en forma de vector columna, una vez se ha elegido un ordenamiento para los nodos.

Usaremos, por ejemplo, como parámetros $\Delta x = 2$, $\Delta y = 3$, $n = 50$, $m = 50$. Esta matriz de incógnitas se va a convertir en un vector $n \times m$, lo que significa que la matriz del sistema va a tener $(n \times m)^2$ elementos.

Primero definimos las constantes del problema:

```
lx=100.0;
ly=150.0;
n=50;
m=50;
dx=lx/(n+1);
dy=ly/(m+1);
```

A continuación, creamos una función que reordena los elementos de una matriz bidimensional en un vector:

```
function place=place(i,j,n)
place=i+n*(j-1);
```

Ahora definimos la matriz del sistema teniendo en cuenta que la incógnita no va a ser una matriz de dos dimensiones sino un vector. Esto hace que la matriz del sistema tenga en realidad $nm \times nm$ elementos. Para cargar la matriz y el término independiente usamos la siguiente función:

```
function [A,b]=carga_matriz(n,m,dx,dy)

A=zeros(n*m,n*m);
i=1;
j=1;

A(place(i,j,n),place(i,j,n))=-2*(1/(dx*dx)+1/(dy*dy));
A(place(i,j,n),place(i+1,j,n))=1/(dx*dx);
A(place(i,j,n),place(i,j+1,n))=1/(dy*dy);

b(place(i,j,n))=0.0;

for j=2:m-1
A(place(i,j,n),place(i,j,n))=-2*(1/(dx*dx)+1/(dy*dy));
A(place(i,j,n),place(i+1,j,n))=1/(dx*dx);
A(place(i,j,n),place(i,j-1,n))=1/(dy*dy);
A(place(i,j,n),place(i,j+1,n))=1/(dy*dy);

b(place(i,j,n))=-1.0/(dx*dx)*sin(pi*j/(m+1));
end

j=m

A(place(i,j,n),place(i,j,n))=-2*(1/(dx*dx)+1/(dy*dy));
A(place(i,j,n),place(i+1,j,n))=1/(dx*dx);
```

```

A(place(i,j,n),place(i,j-1,n))=1/(dy*dy);

b(place(i,j,n))=0.0;

for i=2:n-1
j=1
A(place(i,j,n),place(i,j,n))=-2*(1/(dx*dx)+1/(dy*dy));
A(place(i,j,n),place(i-1,j,n))=1/(dx*dx);
A(place(i,j,n),place(i+1,j,n))=1/(dx*dx);
A(place(i,j,n),place(i,j+1,n))=1/(dy*dy);

b(place(i,j,n))=-1.0/(dy*dy)*sin(pi*i/(m+1));

for j=2:m-1
A(place(i,j,n),place(i,j,n))=-2*(1/(dx*dx)+1/(dy*dy));
A(place(i,j,n),place(i-1,j,n))=1/(dx*dx);
A(place(i,j,n),place(i+1,j,n))=1/(dx*dx);
A(place(i,j,n),place(i,j-1,n))=1/(dy*dy);
A(place(i,j,n),place(i,j+1,n))=1/(dy*dy);

b(place(i,j,n))=0.0;
end

j=m
A(place(i,j,n),place(i,j,n))=-2*(1/(dx*dx)+1/(dy*dy));
A(place(i,j,n),place(i-1,j,n))=1/(dx*dx);
A(place(i,j,n),place(i+1,j,n))=1/(dx*dx);
A(place(i,j,n),place(i,j-1,n))=1/(dy*dy);

b(place(i,j,n))=-1.0/(dy*dy)*sin(pi*i/(m+1));
end

i=n;
j=1;

A(place(i,j,n),place(i,j,n))=-2*(1/(dx*dx)+1/(dy*dy));
A(place(i,j,n),place(i-1,j,n))=1/(dx*dx);
A(place(i,j,n),place(i,j+1,n))=1/(dy*dy);

b(place(i,j,n))=0.0;

for j=2:m-1
A(place(i,j,n),place(i,j,n))=-2*(1/(dx*dx)+1/(dy*dy));
A(place(i,j,n),place(i-1,j,n))=1/(dx*dx);
A(place(i,j,n),place(i,j-1,n))=1/(dy*dy);
A(place(i,j,n),place(i,j+1,n))=1/(dy*dy);

b(place(i,j,n))=-1.0/(dx*dx)*sin(pi*j/(m+1));

```

```

end

j=m

A(place(i,j,n),place(i,j,n))=-2*(1/(dx*dx)+1/(dy*dy));
A(place(i,j,n),place(i-1,j,n))=1/(dx*dx);
A(place(i,j,n),place(i,j-1,n))=1/(dy*dy);

b(place(i,j,n))=0.0;

```

Finalmente, llamamos a la función, resolvemos el sistema lineal y reconstruimos la solución, para poder visualizarla, utilizando las siguientes instrucciones:

```

[A,b]=carga_matriz(n,m,dx,dy);
T=A \ b';
T=reshape(T,m,n);
contour(T,50);
c = colorbar('eastoutside');
xlabel('x');
ylabel('y');

```

Obteniendo la gráfica de la Figura 1.2.

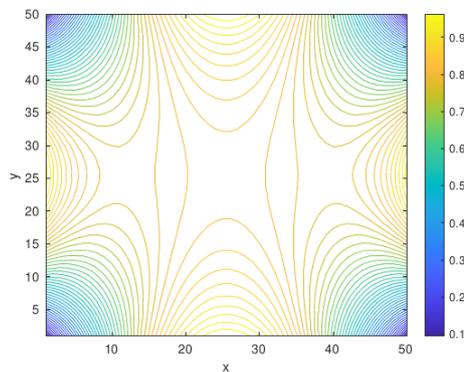


Figura 1.2: Solución del problema bidimensional.

Un primer paso para mejorar la ejecución de un código es comprobar qué partes consumen más recursos e intentar mejorarlas aisladamente. Si no somos capaces de conseguirlo nos replantearemos la solución de un modo global.

Para calcular los tiempos haremos uso de las funciones `tic` y `toc`.

```

lx=100.0;
ly=150.0;
n=50;
m=50;
dx=lx/(n+1);
dy=ly/(m+1);

tic
[A,b]=carga_matriz(n,m,dx,dy);
toc;

disp('Creacion de la matriz del sistema'),disp(toc);

tic;
T=A \ b';
toc;disp('Resolucion del sistema'),disp(toc);

```

Aunque el tiempo que tarda en resolver el problema es un indicador de la eficiencia del algoritmo, no se suele usar como una medida objetiva, ya que es muy variable de una máquina a otra.

1.2.2. Ecuación del calor dependiente del tiempo

Se considera Ω el cuadrado unidad en \mathbb{R}^2

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} .$$

Sobre Ω se considera el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + f & \text{para } (x, y) \in \Omega, t \in]0, T[\\ u(t, x, y) = g(t, x, y) & \text{para } (x, y) \in \partial\Omega, t \in]0, T[\\ u(0, x, y) = u_0(x, y) & \text{para } (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Aproximaremos el problema utilizando el método de diferencias finitas basado en una malla de la forma:

$$t_n = n\Delta t, n = 0, 1, \dots, M, \quad x_i = ih, \quad y_j = jh, \quad i, j = 0, 1, \dots, N + 1.$$

Para un punto genérico (x_i, y_j) de la malla espacial, se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_i, y_j) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x_i, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x_i, y_j) + f(t, x_i, y_j) .$$

Usando la aproximación en diferencias finitas de las derivadas segundas podemos escribir,

$$\nabla^2 u(t_n, x_i, y_j) \approx \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i+1,j}^n).$$

Para la discretización de la variable temporal, se utiliza el método de Euler implícito, aproximando

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

y evaluando el $\nabla^2 u$ en t_{n+1} , obteniendo el esquema:

$$u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n = \frac{\Delta t}{h^2} (u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}). \quad (1.3)$$

Introduciendo $r = \frac{h^2}{\Delta t}$, podemos escribir (1.3) como

$$-u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1} + (4+r)u_{i,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i-1,j}^n = h^2 f_{ij}^n + r u_{i,j}^n. \quad (1.4)$$

Hay que resolver este esquema para $u_{i,j}^{n+1}$ teniendo en cuenta la condición de contorno

$$u_{i,j}^n = g_{i,j}^n \quad i, j = 0, N+1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Se establece un orden para el seguimiento de los nodos como se muestra en la Figura 1.3 por filas de bajo arriba.

Las N^2 incógnitas de la solución para cada paso de tiempo se pueden ordenar por bloques del modo siguiente:

$$U = \begin{pmatrix} U^{[1]} \\ U^{[2]} \\ \vdots \\ U^{[N]} \end{pmatrix}, \quad \text{donde } U^{[j]} = \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{Nj} \end{pmatrix},$$

para $j = 1, 2, \dots, N$. De este modo, para cada paso de tiempo hay que resolver un sistema de la forma

$$AU = b,$$

donde la matriz A tiene una estructura a bloques de la forma

$$A = \begin{pmatrix} T & -I & O & \cdots & O \\ -I & T & -I & \ddots & \vdots \\ O & -I & T & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & \cdots & \cdots & -I & T \end{pmatrix},$$

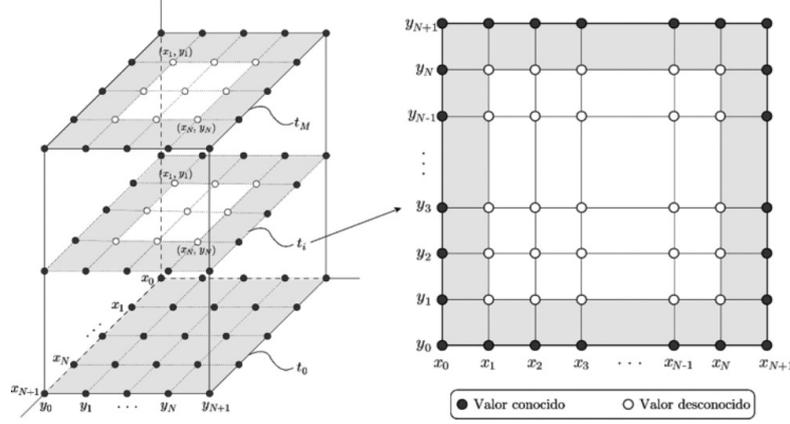


Figura 1.3: Malla para la evolución temporal de la ecuación del calor.

donde I es la matriz identidad de orden N , O es la matriz nula de orden N
 T es una matriz tridiagonal de orden N dada por

$$T = \begin{pmatrix} 4+r & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4+r & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 4+r & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4+r \end{pmatrix}.$$

El término independiente para cada paso se escribe

$$b = \begin{pmatrix} b^{[1]} \\ b^{[2]} \\ \vdots \\ b^{[N]} \end{pmatrix}, \quad \text{donde } b^{[j]} = \begin{pmatrix} h^2 f_{1j}^n + g_{0j} \\ h^2 f_{2j}^n \\ \vdots \\ h^2 f_{N-1j}^n \\ h^2 f_{Nj}^n + g_{N+1j}^n \end{pmatrix} + r U^{[j]n},$$

cuando $j = 2, 3, \dots, N-1$. Para $j = 1, N$, se tiene

$$b^{[1]} = \begin{pmatrix} h^2 f_{11}^n + g_{01}^n + g_{10}^n \\ h^2 f_{21}^n + g_{20}^n \\ \vdots \\ h^2 f_{N-11}^n + g_{N-10}^n \\ h^2 f_{N1}^n + g_{N+11}^n + g_{N0}^n \end{pmatrix} + r U^{[1]n},$$

y

$$b^{[N]} = \begin{pmatrix} h^2 f_{1N}^n + g_{0N}^n + g_{1N+1}^n \\ h^2 f_{2N}^n + g_{2N+1}^n \\ \vdots \\ h^2 f_{N-1N}^n + g_{N-1N+1}^n \\ h^2 f_{NN}^n + g_{N+1N}^n + g_{NN+1}^n \end{pmatrix} + r U^{[N]n},$$

Ensamblado de la matriz A

En este problema la matriz A no depende del tiempo, por ello, sólo va a hacer falta ensamblarla una vez. Podemos ensamblarla como se ha hecho en el problema independiente del tiempo, o bien haciendo uso de un método más compacto que describimos a continuación.

Hemos de resaltar que se puede hacer la descomposición

$$A = \begin{pmatrix} T & O & O & \cdots & O \\ O & T & O & \ddots & \vdots \\ O & O & T & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ O & \cdots & \cdots & & T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & -I & O & \cdots & O \\ -I & O & -I & \ddots & \vdots \\ O & -I & O & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -I \\ O & \cdots & \cdots & -I & O \end{pmatrix}$$

que tiene la estructura

$$A = I \otimes T + S \otimes I,$$

siendo S una matriz de orden N de la forma

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y se ha introducido el producto tensorial (producto de Kronecker) \otimes que,

para $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$, se define como:

$$B \otimes C = \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} & b_{11}c_{12} & \cdots & b_{11}c_{1q} & \cdots & \cdots & b_{1n}c_{11} & b_{1n}c_{12} & \cdots & b_{1n}c_{1q} \\ b_{11}c_{21} & b_{11}c_{22} & \cdots & b_{11}c_{2q} & \cdots & \cdots & b_{1n}c_{21} & b_{1n}c_{22} & \cdots & b_{1n}c_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ b_{11}c_{p1} & b_{11}c_{p2} & \cdots & b_{11}c_{pq} & \cdots & \cdots & b_{1n}c_{p1} & b_{1n}c_{p2} & \cdots & b_{1n}c_{pq} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1}c_{11} & b_{m1}c_{12} & \cdots & b_{m1}c_{1q} & \cdots & \cdots & b_{mn}c_{11} & b_{mn}c_{12} & \cdots & b_{mn}c_{1q} \\ b_{m1}c_{21} & b_{m1}c_{22} & \cdots & b_{m1}c_{2q} & \cdots & \cdots & b_{1n}c_{21} & b_{1n}c_{22} & \cdots & b_{1n}c_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ b_{m1}c_{p1} & b_{m1}c_{p2} & \cdots & b_{m1}c_{pq} & \cdots & \cdots & b_{mn}c_{p1} & b_{mn}c_{p2} & \cdots & b_{mn}c_{pq} \end{pmatrix}.$$

De este modo, se ensamblan las matrices S , I y T y se efectúa la suma de los dos productos de Kroneker.

Una posible implementación de este método viene dada en la siguiente función:

```
function [A] = Matrizlaplace(N,r)
% Matriz identidad
I = speye(N);
% Matriz T
e = -1*ones(N,1);
T = spdiags([e,-(4 + r)*e,e],[-1,0,1],N,N);
% Matriz S
S = spdiags([e,e],[-1,1],N,N);
% Matriz A
A = kron(I,T) + kron(S,I);
end
```

Para ello, se ha hecho uso de las funciones `speye()`, y `spdiags()` para matrices dispersas, que estudiaremos más adelante.

1.3. Ejercicios

1. La distribución estacionaria de temperaturas en una varilla que se calienta con una cierta fuente, se puede describir mediante el modelo siguiente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 1 + 0.1x + 0.01x^2, \quad x \in [0, 10].$$

Sabiendo que las temperaturas en los extremos son $T(0) = 1$ y $T(10) = 10$. Obtén la solución analítica del problema. Obtén las aproximaciones numéricas de la solución usando una malla con 10 y 100 nodos interiores y compara las soluciones con un gráfico.

2. Supongamos que se tiene una barra de longitud 0.5 m que inicialmente se halla a una temperatura de 25 grados centígrados. El extremo derecho se pone a una temperatura de 100 grados centígrados, mientras que el otro extremo se mantiene a 25 grados. Pretendemos saber cómo evoluciona la temperatura en los distintos puntos de la barra. Para ello, se usa la ley de Fourier

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \alpha = 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Resuelve el problema de la distribución de temperaturas dependiente del tiempo suponiendo que elegimos $\Delta x = 0.1$ y utilizando un paso de tiempo $\Delta t = 1$. Repite los cálculos con $\Delta t = 1$ pero usando el método implícito y el método de Crank-Nicholson expuestos en la teoría. Comenta un poco los resultados que has obtenido.

3. Un pulso viajero tiene la ecuación

$$y(x, t) = \exp(-20(x - 0.1t)^2).$$

Este pulso es la solución del problema diferencial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 100 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad y(x, 0) = \exp(-20x^2), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 4x \exp(-20x^2).$$

Resuelve numéricamente este problema suponiendo que el pulso está restringido a evolucionar en un intervalo suficientemente grande y crea 10 ficheros llamados pulso1.jpg, pulso2.jpg, ..., pulso10.jpg que tengan la figura de la evolución del pulso para los instantes $t = 1, 2, \dots, 10$ y compáralos con la solución analítica.

4. La deformación de una lámina rectangular y alargada que soporta una carga uniforme bajo una fuerza de tensión axial se modeliza mediante una ecuación diferencial de segundo orden. Denotemos por s el módulo de la fuerza axial y por q la intensidad de la carga uniforme, entonces la deformación w viene dada por

$$w'' - \frac{s}{D}w = -\frac{ql}{2D}x + \frac{q}{2D}x^2 ,$$

con $0 \leq x \leq l$, $w(0) = w(l) = 0$. Siendo l la longitud de la lámina y D su rigidez. Tomando $q = 200\text{kg/m}^2$, $s = 100\text{kg/m}$, $D = 8.8 \cdot 10^7\text{kg/m}$, $l = 50\text{m}$. Aproxima la deformación a intervalos de un metro y haz una gráfica con el resultado.

5. Recordad que si se usa un mallado uniforme de la forma $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, $y_{j+1} = y_j + \Delta y$, una aproximación del laplaciano es

$$\nabla^2 (x_i, y_j) \approx \frac{1}{\Delta x^2} (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \frac{1}{\Delta y^2} (u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) .$$

Utilizando esta aproximación, con un mallado uniforme con $\Delta x = \Delta y = 1$, resolver el problema

$$\nabla^2 u = 0 , \quad (x, y) \in R ,$$

siendo $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ con las condiciones de contorno

$$u(x, 0) = 20, \quad u(x, 4) = 180, \quad 0 < x < 4,$$

y

$$u(0, y) = 8, \quad u(4, y) = 0, \quad 0 < y < 4.$$

Hacer una representación de la solución usando la instrucción `pcolor()`.

6. La ecuación de la conducción de calor en una barra viene dada por

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} , \quad x \in (0, l), \quad t > 0,$$

consideremos una barra de aluminio de longitud $l = 3\text{m}$, cuya densidad es $\rho = 2700\text{kg/m}^3$, su capacidad calorífica es $c = 897 \text{ J}/(\text{kg K})$ y su conductividad térmica $k = 273 \text{ W}/(\text{mK})$. Estamos interesados en estudiar la evolución de la temperatura en la barra, partiendo de la condición inicial $T(x, 0) = 500\text{K}$ si $x \in (1, 2)$ y $T(x, 0) = 250\text{K}$ si $x \notin (1, 2)$. La barra está sometida a las condiciones de contorno $T(0, t) = T(3, t) = 250\text{K}$. Comparar los resultados del método de Euler implícito y del método de Crank-Nicolson para $t \in [0, 2]\text{s}$ si se utiliza $\Delta x = 0.1\text{m}$ y $\Delta t = 0.25\text{s}$.

7. La temperatura, u , de una varilla larga en donde hay una fuente de calor homogénea se puede modelizar por la ecuación del calor

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

donde l es la longitud, ρ es la densidad, c es la capacidad calorífica y r es el calor generado por unidad de volumen y unidad de tiempo. Se tienen los siguientes datos

$$\begin{aligned} l &= 1.5 \text{ cm} & k &= 1.04 \text{ cal}/(\text{cm}^\circ\text{C s}) \\ \rho &= 10.6 \text{ g}/\text{cm}^3 & c &= 0.056 \text{ cal}/(\text{g}^\circ\text{C}) \\ r &= 5 \text{ cal}/(\text{cm}^3\text{s}) \end{aligned}$$

Los extremos de la varilla se mantienen a 0°C y la distribución inicial de temperatura es

$$u(x, 0) = \text{sen} \left(\frac{\pi x}{l} \right), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Utilizando el método de Euler implícito, estudiar la evolución de la temperatura en la barra en $t \in [0, 100]$ s usando $\Delta x = 0.01$ cm.

8. Obtén una solución numérica del problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

con las condiciones

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 100x, \quad u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 100y.$$

Utilizar los pasos $\Delta x = \Delta y = 0.1, 0.05$ y 0.01 . Estima el error cometido en cada aproximación, tomando como referencia la solución en la malla más fina. Haz un dibujo de la solución.

9. Dado el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xe^y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1,$$

con las condiciones de frontera

$$u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 2e^y, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

y

$$u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = xe, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Obtén la solución numérica del problema. Sabiendo que la solución analítica es $u(x, y) = xe^y$, estudia el error cometido para distintos valores de Δx y Δy .

10. Una fórmula para aproximar la derivada cuarta viene dada por

$$y_i^{IV) = \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^4}.$$

Se tiene una viga de longitud L soportada sobre una base elástica con rigidez k (N/m²). La deformación de la viga, v , debida a una carga uniformemente distribuida, w_0 (N/m), viene dada por la solución del problema

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + kv = w_0, \quad v(0) = 0, \quad v(L) = 0.$$

Este problema usando variables adimensionales se escribe como

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} + \gamma y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

donde

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad y = \frac{EIw}{w_0 L^4}, \quad \gamma = \frac{kL^4}{EI}.$$

Resuelve el problema para $\gamma = 10^5$ con distintas discretizaciones hasta conseguir una gráfica convergida de y frente a ξ .

11. Usa el método de diferencias finitas para resolver el problema

$$-u'' + \frac{k}{T}u = \frac{W}{T}, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

donde $u = u(x)$ representa el desplazamiento vertical de una cuerda de longitud 1, sometida a una carga vertical de intensidad W por unidad de longitud. Para el caso $W = 1 + \sin(4\pi x)$, $T = 1$, $k = 0.1$, obtén la solución del problema para $h = 1/i$ con $i = 10, 20, 40, 60$ y estima el orden del error del método numérico utilizado.

12. Se considera el problema

$$u'(x) = 0.05u'', \quad x \in [0, 1],$$

con las condiciones $u(0) = 0$, $u(1) = 1$. Si se usa un esquema en diferencias centrado, se llega a

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = 0.05 \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2}. \quad (1.5)$$

Encuentra la solución analítica del problema continuo.

Obtén la solución numérica de la ecuación en diferencias anterior cuando $\Delta x = 0.1$, y las condiciones de contorno son $u(0) = 0$ y $u((N + 1)\Delta x) = 1$.

Supón que el error del método numérico (1.5) es de la forma $e(\Delta x) = C\Delta x^r$, donde r es el orden del método. Si se toma $\Delta x = 2^{-k}$ con $k = 4, 5$ y 6 , estima el orden del método usando la expresión

$$r = \frac{\ln(e(\Delta x_k)/e(\Delta x_{k+1}))}{\ln(\Delta x_k/\Delta x_{k+1})}.$$

13. Dado el problema parabólico

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,$$

con las condiciones de contorno

$$u(0, t) = 5, \quad u(\pi, t) = 10, \quad t > 0,$$

y la condición inicial $u(x, 0) = \frac{5\pi+5x}{\pi} + \text{sen}(3x) - \text{sen}(5x)$. Se sabe que la solución analítica de este problema se expresa como

$$u(x, t) = \frac{5\pi + 5x}{\pi} + \text{sen}(3x)e^{-18t} - \text{sen}(5x)e^{-50t}.$$

Obtén la solución numérica mediante el método de Euler implícito y el método de Crank-Nicolson utilizando 50 nodos espaciales equiespaciados y $\Delta t = 0.01$. Compara el error de cada método para obtener la solución en $t = 0.1$.

14. Dada la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} T = r'',$$

donde

$$r'' = \left(4\gamma^2 (x - x_0)^2 - 2\gamma - \frac{1}{\alpha} \right) \exp(-\gamma (x - x_0)^2).$$

Este problema tiene como solución analítica el pulso Gaussiano

$$T(x) = \exp(-\gamma (x - x_0)^2).$$

Se pide estudiar la solución numérica de este problema utilizando una malla de $N + 1$ puntos en el intervalo $[0, 1]$ y los valores $x_0 = 0.6$, $\alpha = 1$,

$\gamma = 1381.6$. Como el pulso Gaussiano decae a cero muy rápidamente se pueden considerar condiciones de contorno homogéneas en los extremos. Estudiar el error de la solución numérica frente a la analítica si $N = 50, 100$ y 200 .

15. El método de Euler 'hacia atrás', el método de Euler 'hacia delante' y el método de Crank-Nicolson son casos particulares del método θ , que para una ecuación de la forma $u' = au$, se formula como

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = (1 - \theta)au^n + \theta au^{n+1} .$$

Este método es estable para todo $\theta \geq 1/2$.

Consideremos el problema de la conducción de calor en una barra unidimensional dado por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \beta \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L), t \in (0, T] \\ u(0, t) &= 50, t \in (0, T], \\ \frac{\partial}{\partial x} u(L, t) &= 0, t \in (0, T], \\ u(x, 0) &= 10, x \in [0, L] \end{aligned}$$

Suponemos que la barra es de longitud $L = 50\text{cm}$, y que está hecha de una aleación de aluminio, con lo que

$$\beta = \frac{\kappa}{\rho c} = 8.2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.$$

El estado estacionario se alcanza a los $T \approx 3600\text{s}$. Estudia la evolución del transitorio con el método θ para $\theta = 0.5$ y $\theta = 1$, usando los pasos de tiempo $\Delta t = 0.001, 0.01, 0.05\text{s}$ y comenta los resultados.

16. La evolución de la concentración de un cierto contaminante, C , en un flujo que se desplaza a lo largo de un medio unidimensional, se puede modelizar con una ecuación de convección-difusión de la forma

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

donde u es la velocidad del fluido y D el coeficiente de difusión.

La solución numérica de este problema se puede obtener usando el método θ ,

$$\begin{aligned} \frac{C_j^{m+1} - C_j^n}{\Delta t} + \theta \left(u \frac{C_{j+1}^{m+1} - C_{j-1}^{m+1}}{2\Delta x} - D \frac{C_{j+1}^{m+1} - 2C_j^{m+1} + C_{j-1}^{m+1}}{\Delta x^2} \right) + \\ (1 - \theta) \left(u \frac{C_{j+1}^n - C_{j-1}^n}{2\Delta x} - D \frac{C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Una ‘nube’ de contaminante se vierte repentinamente en un tramo de 1500 m de largo en el extremo aguas arriba de un río que fluye con velocidad constante $u = 0.02$ m/s. El problema se resuelve en un tramo de 15 km del río. El coeficiente de difusión es $D = 1.6$ m²/s. Utilizar el método θ para la obtener la solución usando $\Delta x = 250$ m, y $\Delta t = 5000$ s. Comparar la solución obtenida en $t = 5 \times 10^5$ s cuando $\theta = 0, 1$ y 0.55 .

17. Sea R el rectángulo cuyos vértices son $\{(0, 0), (4, 0), (4, 3), (0, 3)\}$. Resuelve en el interior de R con el método en diferencias finitas la EDP $u_{xx} + u_{yy} - yu_x - xu_y - u = 0$ tomando $\Delta x = \Delta y = 0.1$ y la condición de contorno $u(x, y) = 2x - 2y$ en la frontera de R .