Máster en Materiales y Sistemas Sensores para Tecnologías Medioambientales (Erasmus Mundus)

PRÁCTICAS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Damián Ginestar Peiró

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Práctica 1

Raíces de ecuaciones, integrales y ecuaciones diferenciales

En esta práctica presentaremos algunas funciones disponibles en Matlab para realizar cálculos aproximados.

1.1. Búsqueda de raíces

Supongamos que se buscan raíces de la función

$$f(x) = \frac{1}{(x-0{,}3)^2 + 0{,}01} + \frac{1}{(x-0{,}9)^2 + 0{,}4} - 6 \ .$$

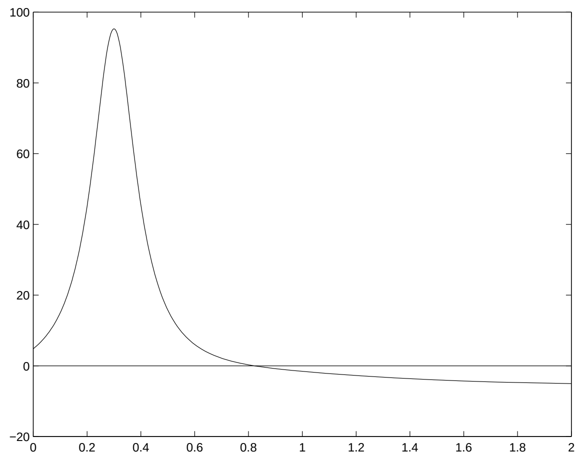
Primero se dibuja la función junto con el eje de las x-s, para ello, primero se define la función

```
function y=func(x)
%  funcion de la que se quiere buscar la raiz
y =1/((x-0.3).^2 +0.01) +  1/((x-0.9).^2 + 0.4)- 6;
```

y se utiliza la función `fplot( )`, del siguiente modo:

```
fplot('func', [0 2])
hold on
fplot('0', [0 2], 'g')
hold off
```

obteniendo



Observamos que tiene un cero cerca de $x = 0{,}8$. Se puede mejorar la precisión de esta raíz con la función `fzero( )`, así escribimos

```
fzero('func', 0.8)
```

obteniendo el valor $x = 0{,}8222$.

Supongamos ahora que queremos obtener una raíz del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \ , \\ x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0 \ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

La siguiente función de Matlab es una implementación del método de Newton para sistemas de ecuaciones,

```
function [xr,k]=newtonsi(x,tol,imax)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%  Metodo de Newton para sistemas de ecuaciones
%  Uso: [xr,k]=newtonsi(x,tol,imax)
%
%  Input:
% x = vector x1,x2,...,xn inicial,
% tol=tolerancia
%
%  Se ha de disponer de las funciones:
```

```
%      f.m  funcion y=f(x) donde se define el sistema
%      jac.m funcion df=jac(x) donde se define la matriz
%     derivada del sistema.
%
%  Output: xr= raiz,  k= numero de iteraciones.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
k=1;
epi=1;
x1=x;
while norm(epi)>tol
   x=x1;
   fxn=f(x);
   axn=jac(x);
   epi=axn\fxn';
   x1=x-epi';
   k=k+1;
   if k>imax
      disp('no converge')
      break
   end
end
xr=x1;
```

Esta función usa dos funciones auxiliares, `f.m` y `jac.m` donde se definen la función que define el sistema de ecuaciones y la matriz derivada de esta función, respectivamente. Para el problema (1.1) estas funciones son de la forma

```
function y=f(x)
% funcion para utilizar con newtonsi.m
y(1)=x(1)^2-10*x(1)+x(2)^2+8;
y(2)=x(1)*x(2)^2+x(1)-10*x(2)+8;
```

y

```
function df=jac(x)
% matriz jacabiana para usar con newtonsi.m
df(1,1)=2*x(1)-10;
df(1,2)=2*x(2);
df(2,1)=x(2)^2+1;
df(2,2)=2*x(1)*x(2)-10;
```

Una vez se escriben estas funciones en sus correspondientes ficheros, podemos ejecutar la instrucción `[xr,k]=newtonsi([0 0],1.e-5,100)`, obteniendo como resultado la raíz `xr`$= [1{,}00, 1{,}00]$ en `k`$= 10$ iteraciones.

1.2. Integración aproximada

Para el cálculo aproximado de integrales definidas el Matlab tiene implementadas las funciones `trapz`, `quad` y `quad8`.

Si queremos calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)\, dx \ ,$$

podemos escribir

```
x=0:pi/10:pi/2;
y=sin(x);
integral=trapz(x,y)
```

La función `trapz( )` utiliza el método de los trapecios basado en la división utilizada para definir el vector `x`.

Otras posibilidades son

```
integral=quad('sin',0,pi/2)
```

o bien,

```
integral=quad8('sin',0,pi/2)
```

1.3. Ecuaciones diferenciales

El Matlab tiene implementadas, entre otras, las funciones `ode23` u `ode45`, que permiten resolver problemas de valores iniciales asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias.

Supongamos que se quiere resolver un problema de valores iniciales asociado a un oscilador de Van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \nu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \ .$$

Primero se ha de expresar la ecuación diferencial en forma normal, esto es, se introducen las variables $y_1 = x$ y $y_2 = \frac{dx}{dt}$, con lo que se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_2 \ , \\ \frac{dy_2}{dt} &= \nu(1-y_1^2)y_2 - y_1 \ .\end{aligned}$$

Luego en un fichero se contruye una función con la siguiente estructura

```
function yprime=vdpol(t,y)
% devuelve las derivadas del oscilador de Van der  Pol
%  se escoge mu = 2
mu=2;% se suele elegir 0 < mu < 10
yprime = [ y(2);
  mu*(1-y(1)^2)*y(2) - y(1) ] ;
```

Luego se puede calcular el problema de valores iniciales asociado al oscilador de Van der Pol con las condiciones iniciales $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$ para $t \in [0, 30]$ de la forma siguiente

```
[t,y]=ode23('vdpol',[0,30],[1;0]);
```

y para dibujar las soluciones hacemos lo siguiente:

```
y1=y(:,1);
y2=y(:,2);
plot(y1,y2) % diagrama de fases
```

El funcionamiento de la función `ode45` es totalmente similar.

1.4. Ejercicios

1. Los problemas relacionados con la cantidad de dinero requerida para pagar una hipoteca en un periodo fijo de tiempo involucran una fórmula de la forma,

$$A = \frac{P}{i}\left[1 - (1+i)^{-n}\right] \ ,$$

conocida como *ecuación de anualidad ordinaria*. En esta ecuación, A es la cantidad de la hipoteca, P es la cantidad de cada pago, e i es la tasa de interés por periodo para los n periodos de pago.

Suponed que se necesita una hipoteca de 120.000 euros de una casa sobre un periodo de 30 años, y que la persona que pide el préstamo no puede hacer pagos de más de 1500 euros al mes. ¿Cuál es la tasa máxima de interés que esta persona puede pagar?.

2. Obtén las raíces de la ecuación

$$x = x^2 \operatorname{sen}(x) \ ,$$

comprendidas en el intervalo $[0, 10]$.

3. La concentración de una bacteria contaminante en un lago decrece según la expresión

$$c(t) = 80e^{-2t} + 20e^{-0{,}5t} \ ,$$

siendo t el tiempo medido en horas. Determinar el tiempo que se necesita para que la concentración del número de bacterias se reduzca a 7.

4. La temperatura de un cierto gas en grados Kelvin, varía con el tiempo según la expresión

$$T(t) = 400 + 200\cos\left(\frac{2\pi t}{1440}\right) \ ,$$

mientras que su presión en atmósferas es de la forma

$$P(t) = \exp\left(-\frac{t}{1440}\right) \ .$$

Calcular para qué valor del tiempo el volumen molar es de 50 litros si $R = 0{,}08205 \mathrm{l{\cdot}atm/K}$. El volumen se puede calcular utilizando la ley de los gases perfectos

$$V = \frac{RT}{P} \ .$$

5. El volumen V de un gas en función de la presión P ejercida por un pistón viene dada en la tabla siguiente

P	60	80	100	120	140	160	180
V	80.0	69.2	60.0	52.0	45.0	38.6	32.5

Calcula el trabajo necesario para disminuir V de 80 a 32.5,

$$W = \int_{32,5}^{80} P\,dV \ .$$

6. Se tiene que construir una hoja de techo corrugado usando una máquina que comprime una hoja plana de aluminio convirtiéndola en una cuya sección transversal tiene la forma de una onda senoidal. Supongamos que se necesita una hoja corrugada de 50 cm de longitud y que cada ondulación tiene una altura de un cm respecto de la línea horizontal y un periodo de 2π cm. El problema de encontrar la longitud de la hoja inicial viene dado por la integral

$$L = \int_0^{50} \sqrt{1+\cos^2(x)}\,dx \ .$$

Estimad esta longitud utilizando Matlab.

7. Calcular aproximadamente el valor de

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2x)}{\cosh(x)} \ ,$$

y compararlo con el valor exacto, $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sech}(\pi)$.

8. Se quiere saber la cantidad de calor que se necesita para aumentar la temperatura de una masa $m = 200$g de la temperatura $T_1 = -100$°C a $T_2 = 200$°C, si sabemos que

$$\text{cantidad de calor} = m \int_{T_1}^{T_2} c(T)\,dT \ ,$$

y tenemos la siguiente tabla de temperaturas y capacidades caloríficas

T	-100	-50	0	50	100	150	200
c	0.11912	0.12427	0.13200	0.13987	0.15032	0.15544	0.17408

9. La intensidad de un circuito RCL con una fuerza electromotriz $E(t)$ viene dada por la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t) \ .$$

Supongamos que se tiene una resistencia de 2Ω, un condensador de 1 F y una autoinducción de 0.5 H. Si la fuerza electromotriz del circuito es de la forma $E(t) = 5\,\mathrm{sen}(t)$. Sabiendo que se cumple la relación

$$\frac{dQ}{dt} = I \ ,$$

que el condensador en el tiempo $t = 0$ está descargado, y que inicialmente no pasa corriente por el circuito, obtener la evolución de la intensidad en una rama del circuito en función del tiempo desde $t = 0$ a $t = 1$ segundos, y la carga del condensador a los 0.5 segundos.

10. Supongamos que en un reactor tiene lugar la reacción

$$\mathrm{H_2(g) + Br_2(g) \rightarrow 2HBr(g)}$$

cuya ley de velocidades es de la forma

$$\frac{1}{2}\frac{d[\mathrm{HBr}]}{dt} = [\mathrm{H_2}][\mathrm{Br_2}]^{\frac{1}{2}} \ ,$$

Suponiendo que la evolución de la concentración de $\mathrm{Br_2}$ en el reactor sigue una ley de la forma

$$[\mathrm{Br_2}] = 5\ln(1+t) \ ,$$

y que se mantiene la concentración de hidrógeno constante $[\mathrm{H_2}] = 5$. Si inicialmente no hay HBr, calcular la concentración de HBr a los 5 segundos de iniciada la reacción.

11. La población de una especie sigue la siguiente ley

$$y' = -0{,}5y - 0{,}04y^2 \ ,$$

donde t se mide en días e $y(t)$ en millones. Sabiendo que hoy la población de esa especie es de 30 millones:

a) ¿Cúantos individuos habrá pasada una semana?.

b) ¿ Cúando se alcanzarán los 5 millones de individuos?.