

**Máster en Materiales y Sistemas Sensores
para Tecnologías Medioambientales
(Erasmus Mundus)**

NOTAS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Damián Ginestar Peiró

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
DEL DISEÑO
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA**

Capítulo 1

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen en muchos problemas de ciencia e ingeniería. Veremos algunos ejemplos sencillos.

1.1.1. Red eléctrica

Supongamos que se quieren determinar las intensidades que circulan por las distintas ramas de la red eléctrica que mostramos en la Figura 1.1

Si aplicamos las leyes de Kirchoff a las 3 mallas obtenemos

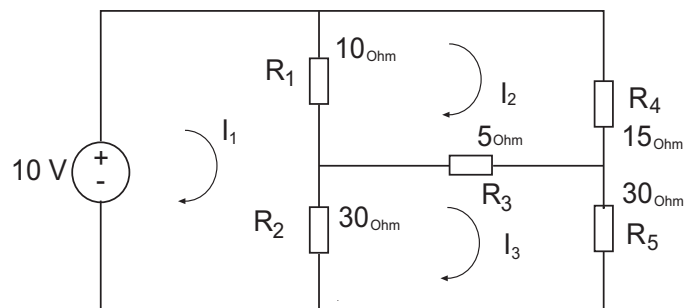


Figura 1.1: Red eléctrica.

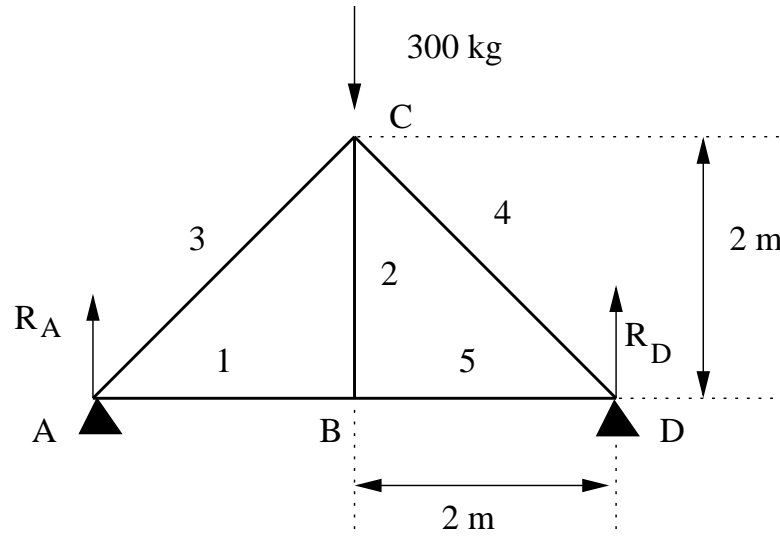


Figura 1.2: Viga articulada.

Malla 1:

$$10I_1 - 10I_2 + 30I_1 - 30I_3 = 10 ,$$

Malla 2:

$$10I_2 - 10I_1 + 5I_2 - 5I_3 + 15I_2 = 0 ,$$

Malla 3:

$$30I_3 - 30I_1 + 5I_3 - 5I_2 + 30I_3 = 10 .$$

Para conocer las intensidades se ha de resolver pues el sistema

$$\begin{pmatrix} 40 & -10 & -30 \\ -10 & 30 & -5 \\ -30 & -5 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

1.1.2. Viga

Por ejemplo, supongamos que se tiene una estructura articulada como la de la Figura 1.2.

La primera ecuación que se puede plantear es que la carga se compensa por las reacciones en los apoyos,

$$R_A + R_D = 300 ,$$

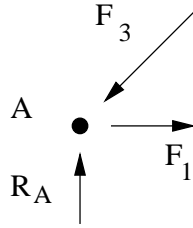


Figura 1.3: Nodo A.

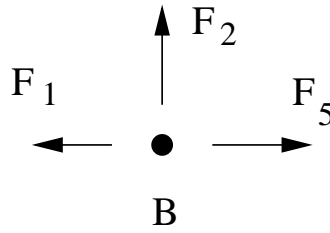


Figura 1.4: Nodo B.

Planteando que la suma de las fuerzas sobre el nodo A son cero como se muestra en la Figura 1.3.

$$F_1 - F_3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 ,$$

$$R_A - F_3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 ,$$

para el nodo B (Figura 1.4) se tiene,

$$F_5 - F_1 = 0 ,$$

$$F_2 = 0 ,$$

y para el nodo C (Figura 1.5)

$$F_3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + F_4 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - F_2 = 300 ,$$

$$F_3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - F_4 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 .$$

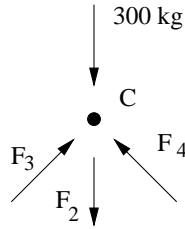


Figura 1.5: Nodo C.

Con esto tenemos 7 ecuaciones con 7 incógnitas, que podemos escribir mediante la siguiente expresión matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_A \\ R_D \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En general un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se expresa

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

que tiene la forma genérica

$$Ax = b \tag{1.1}$$

donde A es la matriz de coeficientes del sistema y b el vector de términos independientes.

Se llama solución de un sistema de ecuaciones con n incógnitas a un vector de n números que satisfacen el sistema de ecuaciones.

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, puede ocurrir que el sistema no tenga solución. Se dice entonces que el sistema es *incompatible*. Si el sistema tiene solución única se dice que el sistema es *compatible* y *determinado*, o bien, si el sistema tiene infinitas soluciones, se dice que el sistema es *compatible e indeterminado*.

Formalmente la solución del sistema (1.1) se puede obtener como

$$x = A^{-1}b,$$

luego el sistema será compatible y determinado sí y sólo sí existe A^{-1} . En la mayoría de ocasiones no resulta conveniente calcular la matriz inversa, A^{-1} , para resolver el sistema y se recurre a técnicas alternativas. Nosotros en particular estudiaremos dos tipos de métodos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales, métodos directos y métodos iterativos.

1.2. Método de Gauss

Definición 1.1 *Diremos que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen las mismas soluciones.*

Consideremos, por ejemplo, un sistema de la forma

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\x_1 + x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}\tag{1.2}$$

Hay una serie de transformaciones que podemos hacer al sistema de ecuaciones sin que la solución del mismo cambie. Así, se puede intercambiar el orden de las ecuaciones, multiplicar una ecuación por un número distinto de cero, y sumar a una ecuación otra ecuación distinta multiplicada por un número. De este modo el sistema de ecuaciones (1.2), es equivalente a

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\x_1 + x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

y a

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0\end{aligned}$$

y a

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\0 + 3x_2 - 3x_3 &= -3.\end{aligned}$$

Dado un sistema de ecuaciones como el dado en (1.1) si a la matriz del sistema, A , se le añade una columna formada por los términos independientes, se obtiene la matriz ampliada del sistema

$$(A \mid b) .$$

Las transformaciones que se hacen sobre un sistema de ecuaciones lineales que conducen a sistemas equivalentes se denominan *transformaciones elementales*. Estas transformaciones se traducen en transformaciones sobre la matriz ampliada del sistema y se resumen en:

- i) Intercambio de filas.
- ii) Multiplicación de una fila por cualquier constante no nula.
- iii) Multiplicación de una fila por cualquier constante no nula y sumársela a otra fila.

El método de eliminación de Gauss para la resolución de un sistema consiste en realizar transformaciones elementales sobre la matriz ampliada del sistema de forma que el sistema equivalente resultante tenga una matriz triangular superior, que se llama *matriz escalonada*.

Veamos el procedimiento a seguir con un ejemplo. Sea el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

La matriz ampliada y el resultado tras realizar una serie de transformaciones elementales sobre ella es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right)$$

De este modo, la matriz del sistema equivalente es triangular superior y se escribe

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -3x_2 - x_3 &= -9 \\ -2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

cuya solución se obtiene fácilmente

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$$

Utilizando el método de Gauss es posible discutir las distintas soluciones de un sistema de ecuaciones lineales cuando éste depende de una serie de parámetros. Por ejemplo, dado el sistema

$$\begin{aligned}x_1 + bx_2 - 2x_3 &= 2 \\ -x_1 - (b-2)x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + (b-4)x_3 &= 0,\end{aligned}$$

escribimos su matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -2 & 2 \\ -1 & (b-2) & 2 & -2 \\ 2 & 2 & (b-4) & 3 \end{array} \right)$$

que es equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -2 & 2 \\ 0 & 2b-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -1 \end{array} \right)$$

con lo que queda el sistema

$$\begin{aligned}x_1 + bx_2 - 2x_3 &= 2 \\ (2b-2)x_2 &= 0 \\ bx_3 &= -1,\end{aligned}$$

Si $b = 0$ obtenemos una contradicción en la última fila, por ello, el sistema es incompatible.

Si $2b - 2 = 0 \rightarrow b = 1$, el sistema queda

$$\begin{aligned}x_1 + bx_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_3 &= -1,\end{aligned}$$

que es un sistema compatible e indeterminado.

Si $b \neq 0$ y $b \neq 1$, el sistema es compatible y determinado y su solución es

$$x_1 = 2 - \frac{2}{b}, \quad x_2 = 0 \quad x_3 = -\frac{1}{b}.$$

1.3. Descomposición LU de una matriz

Veremos que bajo ciertas condiciones es posible descomponer una matriz cuadrada A , como el producto $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior. Para realizar esta descomposición se sigue un proceso similar al método de Gauss.

1.4. Transformaciones y Matrices Elementales.

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, consideremos la fila i -ésima

$$E_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) .$$

Ya hemos visto que las transformaciones elementales que se se pueden definir sobre la matriz A son:

Tipo I: Intercambio de filas E_i con E_j . Denotaremos esta operación por $E_i \leftrightarrow E_j$.

Tipo II: Multiplicación de la fila E_i por cualquier constante no nula λ . Denotaremos esta operación por $\lambda E_i \rightarrow E_i$.

Tipo III: Multiplicación de la fila E_j por cualquier constante no nula λ y sumársela a la fila E_i . Denotaremos esta operación por $E_i + \lambda E_j \rightarrow E_i$.

Podemos utilizar una notación matricial para indicar las transformaciones anteriores. En la siguiente definición introducimos las matrices necesarias para realizar las operaciones elementales.

Definición 1.2 *Se llaman matrices elementales a las que se obtienen a partir de la matriz identidad mediante la aplicación de una transformación elemental.*

Tipo I: *Matriz de permutación es una matriz cuadrada que en cada fila y columna sólo tiene un único elemento distinto de cero, este elemento vale 1. La matriz de permutaciones que intercambia la fila i por la fila*

La matriz $E_3(2)$ viene dada por

$$E_3(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$E_3(2)A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \\ 14 & 2 & 4 & 16 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz $E_{13}(2)$ viene dada por

$$E_{13}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$E_{13}(2)A = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 4 & 17 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5. Factorización LU

Recordemos el esquema del método de Gauss para la resolución de sistemas, que se basa en pasar de una matriz (la matriz ampliada del sistema) a una matriz equivalente que tiene forma escalonada.

Para cada $i = 1, \dots, n$,

Paso 1. Determinar el pivote

Paso 2. Reducir a la forma escalonada utilizando $\lambda_{ki} = a_{ki}a_{ii}^{-1}$, $k = i, \dots, n$, y realizando la operación $(E_k - \lambda_{ki}E_i) \rightarrow E_k$, para $k = i, \dots, n$.

Paso 3. Resolver las incógnitas

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

Este proceso se puede interpretar de forma matricial utilizando las matrices elementales. Se observa que obtener la forma escalonada de la matriz A de coeficientes del sistema consiste en premultiplicar la matriz A por las matrices elementales correspondientes a cada una de las operaciones elementales realizadas.

Por ejemplo, si partimos de una matriz

$$A_{3 \times 3} = [a_{ij}^{(1)}]_{i,j=1,2,3}$$

y aplicamos la eliminación de Gauss simple para eliminar los elementos de la primera columna debemos premultiplicar la matriz A por la matriz elemental triangular inferior

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siendo

$$m_{i1} = \frac{-a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i = 2, 3.$$

Para eliminar los de la segunda columna premultiplicamos nuevamente por una matriz triangular inferior dada por

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$m_{32} = \frac{-a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}.$$

Así,

$$U = M^{(2)}M^{(1)}A$$

con U una matriz escalonada.

Consideremos el sistema $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El método consiste en factorizar la matriz A de coeficientes como un producto de dos matrices de forma que una sea triangular inferior y la otra triangular superior. Una vez factorizada la matriz con este método se consigue disminuir a $\mathbf{O}(n^2)$ el número de operaciones del método de Gauss. Sin embargo, no todas las matrices admiten una factorización LU .

Proposición 1.1 Si se puede realizar la eliminación gaussiana a una matriz sin intercambio de filas o columnas entonces A admite una descomposición $A = LU$, con L una matriz invertible triangular inferior dada por

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

y U una matriz triangular superior con los pivotes en la diagonal dada por

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.2 Encontrar la descomposición LU de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: La primera matriz elemental será

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$M^{(1)}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

La nueva matriz elemental será

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$U = M^{(2)}M^{(1)}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$L = (M^{(2)}M^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.6. Métodos directos para la resolución de sistemas

Generalmente, los métodos directos se basan en transformar el sistema de ecuaciones inicial en un sistema equivalente (o sea, que tenga las mismas soluciones) que se pueda resolver más fácilmente. Para ello, generalmente se utiliza el método de Gauss. Por ejemplo, dado el sistema

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

es equivalente al sistema

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0,1 & 6 \\ 0 & 0 & 155 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6,1 \\ 155 \end{pmatrix}.$$

Con lo que hemos llegado a un sistema de ecuaciones equivalente al inicial cuya matriz de coeficientes es una matriz triangular superior. Este tipo de sistemas tiene una solución sencilla. Se empieza despejando la última ecuación, la solución obtenida se utiliza para despejar la penúltima ecuación y así sucesivamente.

Este método se llama el método de sustitución regresiva y se formaliza del modo siguiente. Dado el sistema

$$Ux = b, \quad U \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

donde $u_{ij} = 0$ si $i < j$ (triangular superior), un posible algoritmo que implementa el método es el siguiente

```

for i=n:-1:1
    x(i)=b(i);
    for j=n:-1:i+1
        x(i)=x(i)-A(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=x(i)/A(i,i);
end

```

1.6.1. Pivotamiento

Los elementos de la diagonal de la matriz U que se obtiene tras la factorización LU de una matriz se llaman pivotes. El algoritmo de la sustitución regresiva realiza divisiones por los distintos pivotes, de este modo, el algoritmo no podrá llevarse a cabo si alguno de los pivotes es cero. Es lógico pensar que si alguno de los pivotes es muy pequeño se producirán errores grandes al calcular la solución.

Veamos un ejemplo. Supongamos que se quiere resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2,099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3,901 \\ 6 \end{pmatrix},$$

cuya solución exacta es $x = (0, -1, 1)$. Ahora resolvemos el sistema mediante el método de Gauss con una aritmética de 5 dígitos significativos

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & | & 7 \\ -3 & 2,099 & 6 & | & 3,901 \\ 5 & -1 & 5 & | & 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & | & 7 \\ 0 & -0,001 & 6 & | & 6,001 \\ 0 & 2,5 & 5 & | & 2,5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & | & 7 \\ 0 & -0,001 & 6 & | & 6,001 \\ 0 & 0 & 1,5005 \cdot 10^4 & | & 1,5004 \cdot 10^4 \end{pmatrix}$$

Al hacer el cálculo para la sustitución regresiva, se tiene

$$x_3 = \frac{1,5004 \cdot 10^4}{1,5005 \cdot 10^4} = 0,99993,$$

que comparado con el resultado exacto, $x_3 = 1$, nos da un resultado aceptable. Para x_2 , se tiene

$$-0,001x_2 + (6)(0,99993) = 6,001,$$

o sea,

$$x_2 = -1,5 ,$$

que ya no es un resultado aceptable, comparado con el valor exacto $x_2 = -1$. Este problema se debe principalmente a la propagación del error debida a la división por el pivote 0,001. Esto se resuelve intercambiando la segunda ecuación por la tercera, ya que al realizar la triangularización ya no se obtiene un pivote tan pequeño. Esta estrategia de intercambiar filas se conoce como pivotación.

Si se permite el intercambio de filas, el algoritmo de Gauss nos lleva a una descomposición para la matriz A de la forma

$$PA = LU ,$$

donde P es una matriz de permutación.

Una estrategia que se suele utilizar para evitar estos problemas del algoritmo de Gauss es la estrategia de *pivotación parcial*, que consiste en tomar como pivote en el paso k -ésimo del algoritmo de triangularización el elemento más grande en valor absoluto en la parte no reducida de la columna k -ésima. La fila que contiene este pivote se intercambia con la fila k -ésima para poner el pivote en la posición (k, k) de la matriz. Los mismos intercambios se han de llevar a cabo en el vector b .

A continuación se muestran dos funciones de Matlab, la primera `solveLU()` implementa el método de Gauss con pivotación parcial para triangularizar la matriz A . La segunda, `trisuper()` calcula la sustitución regresiva sobre la matriz triangularizada y el vector de términos independientes.

```
function [An,bn,v]=solveLU(A,b)
% [An,bn,v]=solveLU(A,b)
% Esta funcion realiza la triangulacion
% de una matriz A y el termino independiente b
% para la resolucion de un sistema Ax=b.
%
% Entradas:
% A matriz del sistema n x n
% b termino independiente
% Salidas:
% An matriz triangularizada
% bn termino independiente
% v vector de punteros para la pivotacion
% parcial
```



```

[m,n]=size(A);
if (m~=n)
    error('La matriz A no es cuadrada');
end
An=A;
bn=b;
v=1:n; % permutaciones
for k=1:n-1
    M=k;
    for i=k+1:n
        if (abs(An(v(i),k))>abs(An(v(M),k)))
            M=i;
        end
    end
end
if (k~=M)
    it=v(k);
    v(k)=v(M);
    v(M)=it;
end
if (abs(An(v(k),k))<=1.e-8)
    error('matriz singular');
end
for i=k+1:n
    alfa=An(v(i),k)/An(v(k),k);
    for j=k+1:n
        An(v(i),j)=An(v(i),j)-alfa*An(v(k),j);
    end
    bn(v(i))=bn(v(i))-alfa*bn(v(k));
end
end

function x=trisuper(An,bn,v)
% x=trisuper(An,bn,v)
% Esta funcion resuelve un sistema triangular
% por el metodo de sustitucionregresiva.
% Se usa despues de la funcion solvelu
% Entradas:
% An matriz triangular superior como sale de solvelu
% bn termino independiente como sale de solvelu
% v vector de puneteros de la pivotacion parcial

```

```

% Salida:
% x solucion del sistema
[m,n]=size(An);
if (m~=n)
    error('La matriz A no es cuadrada');
end
for i=n:-1:1
    x(i)=bn(v(i));
    for j=n:-1:i+1
        x(i)=x(i)-An(v(i),j)*x(j);
    end
    x(i)=x(i)/An(v(i),i);
end

```

1.6.2. Errores y número de condición

Cuando se obtiene la solución numérica de un sistema de ecuaciones, se obtiene un valor aproximado de la solución, x^* , mientras que la solución exacta, x , satisface

$$x = A^{-1}b .$$

Usualmente se tienen dos magnitudes que nos dan una idea del error cometido, el *error*, definido como

$$e = x - x^* ,$$

y el *residuo*

$$r = b - Ax^* .$$

Estas dos magnitudes no tienen porque ser pequeñas al mismo tiempo si se trabaja con aritmética finita.

Por otra parte, cuando se están resolviendo problemas prácticos los coeficientes de un sistema de ecuaciones y los términos independientes están afectados de un cierto error. Por ello, es interesante preguntarse cómo se pueden medir lo que cambia la solución, x , de un sistema si se hacen cambios en A y o en b .

Para evaluar esta dependencia se introduce el *número de condición* de una matriz, definido como

$$\kappa(A) = \frac{M}{m} ,$$

donde

$$M = \max \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right), \quad m = \min \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \right) \quad \forall x \neq 0.$$

Consideramos

$$Ax = b,$$

y el sistema

$$A(x + \delta x) = b + \delta b,$$

se cumple

$$A\delta x = \delta b,$$

además,

$$\|b\| \leq M \|x\|, \quad \|\delta b\| \geq m \|\delta x\|,$$

y si $m \neq 0$, se tiene

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|},$$

así, el número de condición nos da un factor de magnificación del error. De este modo, el número de condición de la matriz del sistema es alto, cabe esperar que la solución numérica obtenida esté afectada de errores altos.

Si se introduce el concepto de norma matricial

$$\|A\| \equiv \max \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right), \quad \forall x \neq 0,$$

una definición del número de condición es

$$\kappa(A) = \|A\| \|A\|^{-1}.$$

El número de condición es un número difícil de calcular y se utilizan estimaciones para este número. Generalmente el número de condición de una matriz es muy alto si la matriz es casi singular.

1.6.3. Matrices especiales

Veremos ahora cómo es posible simplificar los métodos que hemos visto hasta ahora cuando la matriz de coeficientes tiene una estructura particular.

Matrices tridiagonales

Un caso especial de sistemas de ecuaciones que aparecen frecuentemente son aquellos cuya matriz de coeficientes es tridiagonal, o sea, un sistema de ecuaciones con la siguiente estructura

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & \cdots & & & \\ & & \cdots & & & & \\ & & & a_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} & \\ & & & 0 & a_{n-1} & b_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} .$$

Para estos sistemas, el algoritmo de Gauss adopta una forma simple. La matriz se tiene almacenada en los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , y el término independiente en el vector \mathbf{d} .

Primero se copia en \mathbf{x} el vector \mathbf{d}

```
 $\mathbf{x} = \mathbf{d};$ 
```

luego se triangulariza la matriz y el término independiente mediante el siguiente bucle

```
for j=1:n-1
    mu=a(j)/b(j);
    b(j+1)=b(j+1)-mu*c(j);
    x(j+1)=x(j+1)-mu*x(j);
end
```

Posteriormente, se realiza la sustitución regresiva

```
x(n)=x(n)/b(n);
for j=n-1:-1:1
    x(j)=(x(j)-c(j)*x(j+1))/b(j);
end
```

Este algoritmo se conoce como el *algoritmo de Thomas*. No utiliza pivotación parcial y es mucho más rápido que el algoritmo de Gauss.

Matrices simétricas definidas positivas

Recordemos que una matrix A es simétrica si cumple que $A = A^T$. Además diremos que una matriz es definida positiva si cumple

$$x^T Ax > 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Si A es una matriz simétrica y definida positiva se puede encontrar una matriz triangular inferior, L , de forma que

$$LL^T = A.$$

Esta descomposición se denomina descomposición de Choleski de la matriz A .

Veamos cómo se puede calcular la matriz L . Para ello, consideremos un caso 3×3 .

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

calculando el producto, se tienen las relaciones

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11}^2, \\ a_{22} &= l_{21}^2 + l_{22}^2, \\ a_{33} &= l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2, \\ a_{12} &= l_{11}l_{21}, \\ a_{13} &= l_{11}l_{31}, \\ a_{23} &= l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned} l_{11} &= (a_{11})^{\frac{1}{2}}, \\ l_{21} &= \frac{a_{12}}{l_{11}}, \\ l_{22} &= (a_{22} - l_{21}^2)^{\frac{1}{2}}, \\ l_{31} &= \frac{a_{13}}{l_{11}}, \\ l_{32} &= \frac{a_{23} - l_{21}l_{31}}{l_{22}}, \\ l_{33} &= (a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Para una matriz $n \times n$, los elementos de L se pueden calcular mediante las expresiones

$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk} \right), \quad j = i + 1, i + 2, \dots, n.$$

1.7. Métodos iterativos

Los métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales suelen utilizarse para problemas de gran dimensión, ya que usan menos memoria y suelen ser más rápidos que los métodos directos. A continuación veremos alguno de los métodos iterativos más sencillos.

Se parte de un sistema de ecuaciones de la forma

$$Ax = b,$$

y realizamos la descomposición de la matriz de coeficientes

$$A = D - E - F,$$

donde D es la diagonal de A , $-E$ es la parte estrictamente triangular inferior de A y $-F$ es la parte estrictamente triangular superior. se supone que los elementos de D son todos no nulos.

El método de Jacobi se basa en iteraciones de la forma

$$Dx^{k+1} = (E + F)x^k + b,$$

o sea,

$$x^{k+1} = D^{-1}(E + F)x^k + D^{-1}b.$$

Otro método similar al método de Jacobi es el método de Gauss-Seidel. Este método en componentes se escribe de la siguiente forma

$$b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - a_{ii} x_i^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k = 0,$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

En forma matricial el método de Gauss-Seidel se escribirá como

$$(D - E)x^{k+1} = Fx^k + b .$$

Para implementar este método hay que resolver un sistema triangular inferior.

Análogamente, se puede definir otro método de Gauss-Seidel de la forma,

$$(D - F)x^{k+1} = Ex^k + b ,$$

donde se tendría que resolver un sistema triangular superior.

Por otra parte, podemos definir otra descomposición de la matriz A de la forma

$$\omega A = (D - \omega E) - (\omega F + (1 - \omega)D) ,$$

que da lugar al método iterativo conocido como el método SOR (successive over relaxation)

$$(D - \omega E)x^{k+1} = (\omega F + (1 - \omega)D)x^k + \omega b ,$$

donde ω es un parámetro que puede tomar distintos valores y que sirve para mejorar la convergencia del método.

Análogamente, se puede definir otro método SOR de la forma

$$(D - \omega F)x^{k+1} = (\omega E + (1 - \omega)D)x^k + \omega b .$$

Un método SOR simétrico, SSOR, viene definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned} (D - \omega E)x^{k+1/2} &= (\omega F + (1 - \omega)D)x^k + \omega b , \\ (D - \omega F)x^{k+1} &= (\omega E + (1 - \omega)D)x^{k+1/2} + \omega b . \end{aligned}$$

1.8. Ejercicios

1. Resuelve el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

2. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

obtén su inversa.

3. Un distribuidor tiene 3 almacenes donde guarda lavadoras que vende a 4 hipermercados. La cantidad de lavadoras disponible en cada almacén es de 20, 20 y 10 unidades respectivamente, mientras que la demanda de cada hipermercado es de 10, 15, 15 y 10 unidades respectivamente. Plantea un sistema de ecuaciones lineales que represente el problema de transporte de los almacenes a los hipermercados de manera que se satisfaga la demanda.

4. Estudia el carácter del sistema de ecuaciones siguiente según los valores posibles de α y β

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = \beta$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$4x_1 - 5x_2 + \alpha x_3 = -10$$

5. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

obtén todos los valores de α y β para los cuales la matriz es singular.

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones factorizados:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

7. Obtener la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Obtener la matriz triangular inferior L_A que lleva la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

a una matriz equivalente triangular superior, $U_A = L_A A$.

9. Compara la solución que se obtiene mediante el método de Gauss para los sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - 1,01y &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - 0,99y &= 0 \end{aligned}$$

10. Dado el sistema

$$\begin{pmatrix} 0,15 & 2,11 & 30,75 \\ 0,64 & 1,21 & 2,05 \\ 3,21 & 1,53 & 1,04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26,38 \\ 1,01 \\ 5,23 \end{pmatrix}$$

resuélvelo utilizando el método de Gauss sin pivotación parcial y con pivotación parcial.

11. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$Ax = b,$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

comprueba que el método de Jacobi diverge mientras que el método de Gauss-Seidel converge.

12. Determina las dos primeras iteraciones del método de Jacobi para los siguientes sistemas de ecuaciones, si tomamos $x_0 = (0, 0, 0)^T$.

a)

$$\begin{aligned}10x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1\end{aligned}$$

13. Dado el sistema

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 5\end{aligned}$$

calcula dos iteraciones del método SSOR partiendo del vector inicial $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$ y tomando $\omega = 1,25$.

14. Dado el sistema

$$\begin{aligned}4x_1 + 3x_2 &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\ -x_2 + 4x_3 &= -24\end{aligned}$$

compara 3 iteraciones del método de SOR y el método SSOR tomando $x_0 = (0, 0, 0)^T$, y $\omega = 1,25$.