Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^{o}0 (0000), 1–21

Métodos iterativos para resolver sistemas lineales

Rafael Bru

Dept. de Matemàtica Aplicada
Univ. Politècnica de València

rbru@mat.upv.es

Resumen

En este trabajo se revisan diferentes métodos iterativos para la resolución de sistemas lineales $Ax = b$, mediante una pauta común basada en particiones de la matriz de coeficientes del sistema. En los diferentes métodos presentados se estudia la convergencia de cada uno de ellos, para diferentes tipos de matrices A. En particular, se trabaja con matrices monótonas, M–matrices, H–matrices y matrices simétricas definidas positivas. Algunas ideas a desarrollar se indican al final del trabajo.

Palabras clave : *Sistemas de ecuaciones lineales, métodos iterativos, particiones, M-matrices, H-matrices, matrices definidas positivas, métodos paralelos, método de Schwarz.*
Clasificación por materias AMS : *65F10, 15A06*

1. Introducción

En este trabajo vamos a estudiar diversos métodos iterativos que sirven para resolver sistemas lineales del tipo

$$Ax = b, \tag{1}$$

donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, es una matriz no singular, $x \in \mathbb{C}^n$ y $b \in \mathbb{C}^n$, si bien algunos tipos de matrices consideradas se definen directamente en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Estas ecuaciones lineales surgen, por ejemplo, cuando se discretizan ecuaciones en derivadas parciales mediante técnicas de diferencias finitas o de elementos finitos (ver [34] y [37]).

Las diferentes discretizaciones dan lugar a diferentes propiedades de la matriz del sistema A. Por ello, es conveniente estudiar la resolución del sistema (1) bajo las diferentes situaciones que se pueden presentar.

Aunque sólo sea de forma rápida indicaremos que los métodos iterativos tienen ciertas ventajas respecto a los métodos directos cuyo paradigma es el método de Gauss. Cuando la matriz del sistema A está mal condicionada los métodos directos pueden dar soluciones con mucho error. Por otra parte, el coste computacional de los algoritmos directos que más se usan es del orden n^3, $O(n^3)$, mientras que el coste de los iterativos es de $O(n^2)$ por iteración. Además, si la matriz A es una matriz vacía o dispersa, con $O(n)$ elementos no nulos, entonces el coste, por iteración, de los métodos iterativos es de $O(n)$, siendo, en este caso, la diferencia de costes muy significativa. También existen determinadas estructuras matriciales, como las matrices banda, que favorecen el uso de los métodos iterativos. Por último, los métodos iterativos son intrínsecamente paralelizables mientras que los directos no (ver [23] y [33]).

Iniciaremos el estudio con la puesta en común de los métodos clásicos mediante la técnica de las particiones. Con ella, se puede estudiar no solamente los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel o SOR, sino también los métodos de dos etapas y los métodos de direcciones alternadas. Además, se pueden obtener algoritmos síncronos y asíncronos para la computación en paralelo, mediante el uso de multiparticiones. En un trabajo posterior queremos estudiar los métodos iterativos basados en los subespacios de Krylov así como los precondicionadores de los mismos.

Estos dos grandes tipos de métodos iterativos matriciales para la resolución de sistemas lineales tienen diversos puntos en común. Por ejemplo, los métodos clásicos se pueden utilizar como precondicionadores de los métodos basados en los subespacios de Krylov, incluso algunos métodos pueden ser considerados por ambos tipos de esquemas iterativos (ver también [23] y [33]). Recordamos que consideraremos sólo sistemas lineales cuya matriz de coeficientes es invertible. En la última sección se indican unas notas sobre los sistemas singulares.

2. Resultados básicos

Para resolver el sistema (1) se puede realizar la siguiente *partición* de la matriz del sistema

$$A = M - N, \quad \text{donde } M \text{ es invertible y } N \neq O, \tag{2}$$

y por tanto escribir el sistema (1) como

$$Mx = Nx + b.$$

Esta ecuación inspira la construcción del método iterativo, del tipo de punto fijo, siguiente

$$Mx_l = Nx_{l-1} + b, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Este esquema da lugar al primer algoritmo que estudiaremos.

Algoritmo 1. (Una partición). Dado un vector inicial x_0,

1. Para $l = 1, 2, \ldots$, hasta convergencia,
   a) Resolver $Mx_l = Nx_{l-1} + b$

Este esquema será el esquema iterativo básico que vamos a analizar. El análisis se centra en la convergencia del método iterativo cuyo esquema es (3) y, en caso de convergencia, en la rapidez de la misma.

Como por definición M es invertible, la ecuación (3) se puede escribir de la forma

$$x_l = M^{-1}Nx_{l-1} + M^{-1}b, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Por recursión la ecuación (4) se puede escribir en función del vector inicial x_0, de donde se puede observar que la convergencia es función de la sucesión matricial $\left\{\left(M^{-1}N\right)^l\right\}$. Aquí el *radio espectral* de la $M^{-1}N$, representado por $\rho(M^{-1}N)$, es decir, el máximo valor absoluto de los valores propios de la matriz, juega un papel esencial. De hecho se define la **velocidad media de convergencia** del esquema iterativo anterior, para l iteraciones, como

$$R_l(M^{-1}N) = -\ln \sqrt[l]{||(M^{-1}N)^l||},$$

donde $||.||$ representa una norma matricial inducida. La **velocidad asintótica de convergencia** se define como

$$R_\infty = \lim_{l\to\infty} R_l(M^{-1}N).$$

Puesto que

$$\lim_{l\to\infty} \sqrt[l]{||(M^{-1}N)^l||} = \rho((M^{-1}N)),$$

(ver [37]), se tiene que

$$R_\infty = -\ln \rho(M^{-1}N).$$

En consecuencia, el radio espectral de la *matriz de iteración* $M^{-1}N$ mide la velocidad asintótica de convergencia. Por tanto, si tenemos dos particiones convergentes de una misma matriz $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$, para comparar su convergencia tendremos que comparar sus radios espectrales, es decir, verificar si $\rho(M_1^{-1}N_1) < \rho(M_2^{-1}N_2)$ o viceversa. Vale la pena hacer notar que puede darse el caso en que se de la desigualdad anterior entre radios espectrales pero que para un número pequeño de iteraciones la velocidad media de convergencia de la segunda partición sea mayor que la de la primera partición.

El estudio de la convergencia del algoritmo 1 o del método correspondiente (3) se basa en el estudio del error

$$e_l = x_* - x_l, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

donde x_* es la solución exacta de la ecuación (1). Esta solución verifica la ecuación (3) y por tanto la (4), es decir,

$$x_* = M^{-1}Nx_* + M^{-1}b. \tag{5}$$

Restando las ecuaciones (4) y (5), se obtiene

$$e_l = x_* - x_l = M^{-1}Ne_{l-1}, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

o escrito en función del error inicial e_0

$$e_l = (M^{-1}N)^l e_0, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

En consecuencia el método iterativo (3) converge a la solución del sistema (1) si y sólo si la sucesión del error $\{e_l\}$ converge a cero, lo que es equivalente a que la sucesión de potencias de la matriz de iteración satisface

$$\lim_{l \to \infty} (M^{-1}N)^l = O.$$

Para decidir cuándo detener la iteración es necesario estimar alguna norma del error $||x_* - x_l||$, lo que se suele hacer considerando $||x_l - x_{l-1}||$.

La forma canónica de Jordan de una matriz se utiliza para realizar el estudio de la convergencia de este método, obteniéndose el siguiente resultado básico (ver [37]).

Teorema 1 *El esquema iterativo* (3)*, o equivalente, el algoritmo 1, converge a la única solución del sistema* (1)*, para cualquier vector inicial* x_0*, si y sólo si, el radio espectral de la matriz de iteración* $M^{-1}N$ *es menor que uno.*

Puesto que el radio espectral de una matriz es el ínfimo del conjunto de todas las normas matriciales de dicha matriz, (ver [24]), intentamos buscar condiciones bajo las cuales el radio espectral es menor que uno o que una determinada norma matricial sea inferior a uno. Para estudiar esta caracterización usaremos diferentes clases de matrices del sistema y diferentes particiones de la misma. En particular, investigaremos tres clases de matrices, las denominadas *matrices monótonas*, las *H–matrices*, y por último las *matrices simétricas definidas positivas.* La elección de estos tres grupos no es casual sino que obedece a causas científicas. En efecto, los tres tipos de matrices aparecen en la discretización de diferentes problemas de ecuaciones en derivadas parciales como por ejemplo, la ecuación del calor, o la ecuación de difusión neutrónica [8]. Por ejemplo, si se discretiza con la técnica de diferencias finitas la ecuación del calor con condiciones frontera constantes (condición de Dirichlet) en el cuadrado unidad, utilizando una discretización de cinco puntos, se obtiene la matriz

$$A = \begin{bmatrix} B & -I & & & & \\ -I & B & -I & & & \\ & -I & B & -I & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -I & B & -I \\ & & & & -I & B \end{bmatrix},$$

donde I denota la matriz identidad y B con el mismo tamaño que I es

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que A es simétrica, también es fácil comprobar que su inversa es no negativa luego es una matriz monótona. Además, se puede comprobar directamente que cumple la definición de M–matriz y por tanto de H–matriz (ver definiciones 1 y 2). En el clásico trabajo de Varga [38] o en el más reciente de Frommer y Szyld [18] se puede consultar una extensa bibliografía sobre aplicaciones de estas matrices y ejemplos de ellas. Sin embargo, hay otras matrices que no son ni M–matrices ni H–matrices que aparecen en aplicaciones.

Definición 1 *Se dice que una matriz no singular de tamaño $n \times n$ es* ***monótona*** *si su inversa es una matriz no negativa.*

Una subclase muy interesante de matrices monótonas está formada por las llamadas M–matrices definidas a continuación. Así como una matriz simétrica definida positiva tiene muchas caracterizaciones, como por ejemplo, que todos sus valores propios son reales positivos, las M–matrices y H–matrices también tienen muchas caracterizaciones (ver [5]).

Definición 2 *Sea A una matriz cuadrada de orden n y denotemos a sus elementos por a_{ij}.*
*(i) Si A es real, se dice que es una M–**matriz** si se puede escribir como $A = sI - B$ donde $s > \rho(A)$ y B es una matriz cuyos elementos son todos no negativos.*
*(ii) Si A es compleja, se dice que es una H–**matriz** si la matriz $\langle A \rangle$ cuyos elementos fuera de la diagonal son $-|a_{ij}|$, $i \neq j$ y los de la diagonal $|a_{ii}|$, es una M–matriz.*

Como se puede observar de la definición anterior las propiedades de las M–matrices están ligadas a las de matrices no negativas. Toda matriz no negativa tiene la peculiar propiedad de que su radio espectral es valor propio. Además, asociado a dicho valor propio existe un vector propio cuyos elementos son no negativos. Estas propiedades se engloban en el conocido teorema de Perron–Frobenius (ver [37]). Por $|A|$ denotamos a una matriz cuyos elementos son los de A en valor absoluto. De la misma forma $A \geq O$ significa que los elementos de A, a_{ij}, son números reales no negativos.

Usaremos a continuación particiones de alguno de los tipos siguientes.

Definición 3 *Sea $A = M - N$ una partición de la matriz A.*
(i) (ver [37]) Se dice que dicha partición es ***regular*** *si $M^{-1} \geq O$ y $N \geq O$.*

(ii) (ver [37]) Se dice que dicha partición es ***débilmente regular*** *si* $M^{-1} \geq O$ *y* $M^{-1}N \geq O$*.*
(iii) (ver [18]) Se denomina $H-$ ***partición*** *si* $\langle M\rangle - |N|$ *es una* M*–matriz.*
(iv) (ver [18]) Se dice que es una ***partición*** $H-$***compatible*** *si* $\langle A\rangle = \langle M\rangle - |N|$*.*
(v) (ver [34]) Si A *es simétrica se dice que es una partición* $P-$***regular*** *si* $M^T + N$ *es simétrica definida positiva.*

De la no negatividad de las matrices implicadas en los dos primeros tipos de particiones se deduce que una partición regular es siempre débilmente regular. La partición débilmente regular definida aquí se suele decir que es del tipo uno. Permutando el papel de las matrices M y N de la partición se pueden obtener particiones del tipo dos que también tienen propiedades interesantes. Un estudio detallado de estas particiones se puede seguir en [36].

Antes de finalizar esta sección, consideremos la iteración (4). Teniendo en cuenta que la partición (2) se puede escribir como

$$M^{-1}N = I - M^{-1}A \tag{7}$$

se tiene

$$x_l = x_{l-1} - M^{-1}(Ax_{l-1} - b), \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

que utilizaremos en la sección 6. Este esquema iterativo es el que se usa para presentar el método (estacionario) de Richardson donde la matriz M^{-1} es un múltiplo de la matriz identidad (ver [22] y [23]).

3. Métodos síncronos

Si en la matriz $A = [a_{ij}]$, consideramos que los elementos de la diagonal son todos no nulos, es decir, $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, al considerar la partición

$$A = D - L - U$$

donde $D = [d_{ij}]$, es una matriz diagonal con

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & si \quad i = j, \\ 0, & si \quad i \neq j, \end{cases}$$

$L = [l_{ij}]$ y $U = [u_{ij}]$ son matrices estrictamente triangulares, inferior y superior, respectivamente, con

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & si \quad i > j, \\ 0, & si \quad i \leq j, \end{cases} \qquad u_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & si \quad i < j, \\ 0, & si \quad i \geq j, \end{cases}$$

se pueden obtener los métodos clásicos de Jacobi ($M = D$ y $N = L + U$), Gauss–Seidel ($M = D - L$ y $N = U$) y SOR ($M = \frac{1}{\omega}(D - \omega L)$ y $N = \frac{1}{\omega}[(1-\omega)D + \omega U]$), donde $\omega \in \mathbb{R}$.

El primer resultado interesante de convergencia que se obtiene es el siguiente.

Teorema 2 *Consideremos el sistema lineal* (1)*. Entonces el método iterativo* (3)*, o equivalentemente, el algoritmo 1, converge a la solución única del sistema* (1)*, para cualquier vector inicial* x_0*, si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*
(i) A *es una matriz monótona y* $A = M - N$ *es una partición débilmente regular de* A*.*
(ii) A *y* M *son* H*–matrices y* $A = M - N$ *es una* H*–partición de* A*.*
(iii) A *es una* H*–matriz y* $A = M - N$ *es* H*–compatible.*
(iv) A *es una matriz simétrica definida positiva y* $A = M - N$ *es una partición* P*–regular. Además, en este caso, el método (3) es convergente si y sólo si, la matriz* A *es definida positiva.*

El primer apartado de este teorema se demuestra en [37]. En realidad esta parte se puede establecer con varias condiciones equivalentes así como, bajo hipótesis más generales, (ver [14]). La convergencia para H–matrices y H–particiones se puede ver en [18]. Además, en [15] pueden encontrarse resultados de convergencia para matrices no singulares cuya matriz de iteración es simétrica definida positiva. Cuando la matriz del sistema A es simétrica definida positiva y la partición (2) es P–regular, el resultado se encuentra en [34].

Como hemos mencionado en la sección anterior, dadas dos particiones convergentes de una misma matriz $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$, resulta interesante comparar los radios espectrales de las respectivas matrices de iteración, $\rho(M_1^{-1}N_1)$ y $\rho(M_2^{-1}N_2)$, para poder establecer cuál de ellas converge más rápidamente. Fue Varga [37] y posteriormente Woźnicki [39] quienes introducen los primeros y más conocidos resultados de comparación que recogemos en el siguiente teorema.

Teorema 3 *Sea* A *una matriz monótona y* $A = M_1 - N_1 = M_2 - N_2$ *dos particiones regulares. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*
(i) $N_1 \leq N_2$*, es decir,* $N_2 - N_1 \geq O$*,*
(ii) $M_1^{-1} \geq M_2^{-1}$*,*
entonces,

$$\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M_2^{-1}N_2) < 1.$$

Condiciones de comparación análogas a las del apartado (i) del teorema 3 para matrices simétricas definidas positivas pueden encontrarse en [30]. Además, en [14] y [36] pueden encontrarse otras condiciones de comparación, así como, las relaciones existentes entre ellas.

Inspirado, posiblemente por el método de Jacobi por bloques, O'leary y White en 1985 [32] introducen el método iterativo basado en más de una partición, con el objeto de construir algoritmos para ordenadores paralelos que en la década de los 80 tuvo un gran impulso. Consideremos p particiones de la matriz del sistema (1)

$$A = M_k - N_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

y las matrices diagonales no negativas E_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, tales que su suma es la matriz identidad. El conjunto de p particiones de A junto con las matrices de peso E_k se conoce con el nombre de *multipartición* de A. Entonces se puede construir el siguiente algoritmo.

Algoritmo 2. (Multipartición). Dado un vector inicial x_0,

1. Para $l = 1, 2, \ldots,$ hasta convergencia,
   a) Para $k = 1, 2, \ldots, p$
      1) Resolver $M_k y_{k,l} = N_k x_{l-1} + b$
   b) $x_l = \sum_{k=1}^{p} E_k y_{k,l}$

Cada subsistema de este algoritmo se puede resolver en paralelo por cada uno de los p procesadores de un computador paralelo. Después de obtener cada procesador el correspondiente vector $y_{k,l}$ en cada iteración l, se construye la solución global según la ecuación del paso 1.2 del algoritmo 2, produciendo una *sincronización* de las soluciones parciales o de los correspondientes procesadores, en cada iteración. En esta ecuación se observa que cada vector obtenido se multiplica por la matriz de peso E_k correspondiente. Luego los elementos nulos de la diagonal de esta matriz anularán las correspondientes componentes de ese vector. En consecuencia, en ese vector el correspondiente procesador no necesita calcular dicha componente. De esta forma el método de multipartición distribuye el cálculo de las n componentes del vector en cada iteración entre los diferentes procesadores, de forma que, el procesador k sólo calcula la componente i si el elemento i de la diagonal de la matriz E_k es diferente de cero. Además, si los elementos no nulos son diferentes de uno, este método pondera la aportación de los diferentes procesadores.

Supongamos que A es una matriz dividida en bloques $A = [A_{ij}],\ i, j = 1, 2, \ldots, p$. Si se consideran las p particiones con $M_k = \text{diag}(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{pp})$ y las matrices peso E_k como las matrices diagonales que tienen unos en los elementos diagonales correspondientes al bloque A_{kk} y nulos los demás elementos, se obtiene el método de Jacobi por bloques mencionado anteriormente.

Los resultados básicos de convergencia del método de multipartición son los siguientes.

Teorema 4 *Considérese el sistema lineal* (1) *y una multipartición de la matriz del sistema $A = M_k - N_k$, con las matrices de peso E_k, $k = 1, 2, \ldots, p$. Entonces el esquema iterativo explicitado en el algoritmo 2 converge a la solución del sistema* (1)*, para todo vector inicial x_0, si se cumple alguna de las tres condiciones siguientes:*
(i) la matriz del sistema es monótona y las p particiones de la multipartición débilmente regulares.
(ii) A es simétrica definida positiva y las p particiones de una multipartición, de A, son P–regulares, con las matrices de peso E_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, escalares (9)*. En este caso, la convergencia se da si y sólo si, A es simétrica definida positiva.*

(iii) la matriz del sistema lineal es H–matriz y las p particiones de la multipartición son particiones H–compatibles.

Las primeras dos condiciones se dan en [32]. Para matrices definidas positivas se obtiene el resultado con la particularidad que las matrices peso E_k deben ser escalares, es decir,

$$E_k = \alpha_k I, \quad \text{con} \quad \sum_{k=1}^{p} \alpha_k = 1, \tag{9}$$

(ver [32]). El caso (iii) para H–matrices se estudia en [10].

Los dos algoritmos anteriores corresponden a métodos que se pueden denominar *estacionarios*, en el sentido que en cada iteración principal, los cálculos internos tienen los parámetros constantes. Por ejemplo, en el algoritmo 2, se podría pensar que en el bucle definido por el índice k, en alguna partición se resuelva el sistema con diferente número de iteraciones que otras particiones. En este caso, se tendría un método *no estacionario*. El método clásico no estacionario viene dado cuando el sistema del paso 2 del algoritmo 1 o los subsistemas del paso 1.1.1 del algoritmo 2 se resuelven de forma indirecta utilizando particiones de las matrices M_k.

Supongamos que la matriz M_k de la partición de la matriz del sistema A admite la partición *interna* $M_k = B_k - C_k$, entonces se tiene el siguiente algoritmo no estacionario.

Algoritmo 3. (Síncrono de dos etapas con multipartición). Dado un vector inicial x_0,

1. Para $l = 1, 2, \ldots$, hasta convergencia,
   - *a*) Para $k = 1, 2, \ldots, p$
     1) $y_{k,0} = x_{l-1}$
     2) Para $j = 1, 2, \ldots, s(k, l)$
        - a' Resolver $B_k y_{k,j} = C_k y_{k,j-1} + N_k x_{l-1} + b$
   - *b*) $x_l = \sum_{k=1}^{p} E_k y_{k,s(k,l)}$

Otra vez, la solución global, en cada iteración, se obtiene por la ecuación del paso 1.2 del algoritmo 3, produciendo una *sincronización* de todas las soluciones parciales o de todos los procesadores.

El modelo A presentado en [7] es un caso particular de este algoritmo cuando la partición externa se reduce a $A = A - O$. Por otra parte, el algoritmo 3 se reduce al algoritmo 2 cuando la partición *interna* de $M_k = M_k - O$ y $s(k, l) = s = 1$, para $k = 1, 2, \ldots, p$ y $l = 1, 2, \ldots$ Cuando se trabaja con una partición *externa*, $k = 1$, y otra interna, se obtiene el método de dos etapas, llamado a veces *iteraciones internas–externas*. Este método ha sido estudiado en [9], [17], [21], [25] y [31].

El estudio de la convergencia del algoritmo 3 se basa, como en los otros algoritmos, en el estudio de la convergencia del error $e_l = x_* - x_l$, donde x_* es la solución exacta del sistema. Para ello, del algoritmo se desprende que

$$x_l = \sum_{k=1}^{p} E_k \left[R_k^{s(k,l)} x_{l-1} + \sum_{j=0}^{s(k,l)-1} R_k^j B_k^{-1} (N_k x_{l-1} + b) \right],$$

donde, $R_k = B_k^{-1} C_k$. Luego

$$e_l = T_l e_{l-1} = T_l T_{l-1} \cdots T_1 e_0,$$

donde

$$T_l = \sum_{k=1}^{p} E_k \left[R_k^{s(k,l)} + \sum_{j=0}^{s(k,l)-1} R_k^j B_k^{-1} N_k \right],$$

es la matriz de iteración en la iteración l–ésima.

Con estas consideraciones la convergencia del método no estacionario considerado se dará cuando $\lim_{l\to\infty} \Pi_{i=1}^{l} T_i = O$. La demostración de este límite se basa en el siguiente resultado.

Lema 5 *Sea $T_1, T_2, \ldots,$ una sucesión de matrices no negativas. Si existe un número real $0 \le \theta < 1$ y un vector $v > 0$ de $\mathbb{R}^n$, tal que*

$$T_l v \le \theta v, \quad \textit{para todo } l = 1, 2, \ldots,$$

entonces $\rho(T(l)) \le \theta^l$, donde $T(l) = T_l \cdots T_2 T_1$, y por tanto $\lim_{l\to\infty} T(l) = O$.

El teorema siguiente sólo aporta condiciones para que las matrices de iteración $T_1, T_2, \ldots$, tengan las condiciones de este lema y así conseguir la convergencia. Esas condiciones son sobre la matriz de coeficientes A y para cada tipo de matriz considerada en los dos tipos de particiones, las externas e internas.

Teorema 6 *Sea el sistema lineal* (1). *Entonces, el método no estacionario de multipartición en dos etapas, dado en el algoritmo 3, es convergente a la solución exacta del sistema* (1), *para cualquier vector inicial x_0 y cualquier número de iteraciones internas $s(k,l) \ge 1$, $k = 1, 2, \ldots, p$, $l = 1, 2, \ldots$, si se cumple alguna de las condiciones siguientes:*
(i) A es una matriz monótona, las particiones externas $A = M_k - N_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, regulares y las particiones internas $M_k = B_k - C_k$ débilmente regulares.
(ii) A es una H–matriz y las particiones externas $A = M_k - N_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, son H–compatibles al igual que las particiones internas $M_k = B_k - C_k$.
(iii) A hermítica definida positiva, $A = M - N$, con $M = diag(M_1, M_2, \ldots, M_p)$ hermítica y N semidefinida positiva, $M = B - C$ partición P–regular y el número de iteraciones internas acotado.

Las dos primeras condiciones se obtuvieron en [10], y la tercera en [12]. Obsérvese que, en este caso, la partición externa M es una matriz diagonal por bloques, que es un caso más general que el de la correspondiente matriz de Jacobi, permitiendo asignar un bloque a cada procesador y trabajar con bloques. El caso estacionario no exige la acotación de las iteraciones internas como se demuestra en [29]. Otros resultados relacionados se dan en [1].

4. Métodos asíncronos

Hemos comentado rápidamente que los dos métodos secuenciales y paralelos presentados en la sección 3 son síncronos ya que el paso 1.2 del correspondiente algoritmo se realiza después de que todos los vectores $y_{k,s(k,l)}$ que se necesitan han sido previamente calculados.

Supongamos que las matrices de peso E_k forman una partición de la matriz identidad, es decir,

$$E_k = \text{diag}[O \; I_k \; O],$$

con tamaños de bloques adecuados. Entonces en cada procesador se obtiene el valor de la parte del vector correspondiente $E_k y_{k,s(k,l)}$, que puede pasar a formar parte del vector de la iteración x_l sin tener que esperar a actualizar todas las componentes. De este modo, el vector actualizado en parte puede servir "más eficazmente" para los posteriores cálculos, dejando de ser válido el anterior vector x_{l-1} para los demás procesadores o cálculos. Así, el último vector actualizado puede tener grupos de componentes actualizados en diferentes momentos. Con ello, se evita la sincronización del cálculo y por tanto la sincronización de los procesadores, que en muchos casos puede ser importante en el coste computacional.

Normalmente, se considera una nueva iteración cuando algún grupo de componentes que corresponden a los elementos de un conjunto de índices, J_l, se actualiza. Para explicitar el algoritmo correspondiente interesa definir los siguientes parámetros: (i) $k \in J_l$ es el k–ésimo bloque del vector x que se actualiza en la iteración l–ésima, (ii) el subíndice $r(k,l)$ denota la iteración en la que el bloque k–ésimo del vector x está siendo usada para la actualización de cualquier bloque en la iteración l–ésima. Con estos parámetros podemos escribir el algoritmo del método asíncrono.

Algoritmo 4. (Asíncrono dos etapas con multipartición). Dado un vector inicial x_0, donde sus componentes están agrupadas en p bloques, $x_0^{(1)}, \cdots, x_0^{(p)}$,

1. Para $l = 1, 2, \ldots,$ hasta convergencia,
   a) Si $k \in J_l$, hacer
   $$x_l^{(k)} = \sum_{k=1}^{p} E_k \left[R_k^{s(k,l)} x_{r(k,l)}^{(k)} + \sum_{j=0}^{s(k,l)-1} R_k^j B_k^{-1} (N_k x_{r(k,l)}^{(k)} + b) \right],$$

en otro caso, $x_l^{(k)} = x_{l-1}^{(k)}$.

Para poder obtener convergencia en el método asíncrono hay que suponer las tres condiciones siguientes:

- $r(k,l) < l$ para todo $k = 1, 2, \ldots, p,\ l = 1, 2, \ldots,$
- $\lim_{l\to\infty} r(k,l) = \infty$ para todo $k = 1, 2, \ldots, p$.
- El conjunto $\{l \mid k \in J_l\}$ no está acotado para todo $k = 1, 2, \ldots, p$.

La primera condición sólo asegura que grupos de componentes previamente calculadas son usadas para los cálculos posteriores. La segunda condición indica que las componentes, que se utilizan para calcular otras, son actuales y no muy antiguas. Por su parte, la tercera condición indica que cada componente es actualizada un número infinito de veces. Esta condición es equivalente al concepto de sucesión regulada utilizada en [7].

Los siguientes resultados son válidos para este método asíncrono (ver [10]).

Teorema 7 *El método del algoritmo asíncrono de dos etapas con multipartición converge a la solución exacta del sistema* (1)*, para cualquier vector inicial* x_0 *y cualquier sucesión de número de iteraciones internas* $s(k,l)$*,* $l = 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots, p$*, si se cumple alguna de las condiciones siguientes:*
(i) A es una matriz monótona, las particiones externas regulares, las particiones internas débilmente regulares, y los parámetros $r(k,l)$ *y los conjuntos* J_l*,* $l = 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots, p$*, satisfacen las tres condiciones mencionadas anteriormente.*
(ii) A es una H–matriz y las particiones externas e internas son particiones H–compatibles.

El algoritmo 4 (también los algoritmos 1, 2 y 3) se pueden modificar ligeramente mediante la introducción de un parámetro de *relajación* ω en la matriz de iteración. Con ello, se puede obtener mejor velocidad de convergencia. Los resultados de convergencia siguen siendo los mismos con la condición que el parámetro de relajación pertenezca a un cierto intervalo real, por ejemplo $(0,1)$ (ver [11] y [28]).

5. Método alternado

Entre el método de una partición (algoritmo 1) y el de multipartición (algoritmo 2) se encuentra el método alternado o de dos direcciones alternadas que fue introducido por Conrad y Wallach [13] y estudiado posteriormente por Marchuk [26]. Este método se basa en considerar dos particiones diferentes de la matriz del sistema de la forma

$$A = M - N = P - Q. \tag{10}$$

Alternando estas dos particiones se construye el siguiente algoritmo.

Algoritmo 5. (Direcciones alternadas). Dado un vector inicial x_0,

1. Para $l = 1, 2, \ldots$, hasta convergencia,
   a) Resolver $Mx_{l+1/2} = Nx_{l-1} + b$
   b) Resolver $Px_l = Qx_{l+1/2} + b$

La convergencia de este método se analiza mejor escribiendo las dos ecuaciones del algoritmo en una sola de la forma

$$x_l = P^{-1}QM^{-1}Nx_{l-1} + P^{-1}(QM^{-1} + I)b, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Con la matriz de iteración $P^{-1}QM^{-1}N$, Benzi y Szyld [4] obtienen los siguientes resultados.

Teorema 8 *El método iterativo de direcciones alternadas, o equivalentemente, el algoritmo 5, converge a la solución exacta del sistema* (1), *para cualquier vector inicial* x_0*, si se cumple alguna de las condiciones siguientes:*
(i) la matriz A *es monótona y las dos particiones* (10) *son particiones débilmente regulares.*
(ii) la matriz del sistema A *es simétrica y definida positiva y las dos particiones* (10) *son* P*–regulares.*

Por otra parte, y también muy recientemente, Climent y Perea [16] introducen una generalización no estacionaria del algoritmo (5) considerando una multipartición $A = M_k - N_k$ para $k = 1, 2, \ldots, p$, así como resultados de convergencia para dicho algoritmo análogos al Teorema 8.

Este método es una generalización del conocido método ADI que introdujeron Peaceman y Rachford [35] para resolver ecuaciones diferenciales parabólicas sobre un dominio Ω discretizado con una malla de dos dimensiones simétrica.

Recientemente Bai, Golub y Ng [2] estudian la convergencia de sistemas lineales cuando la matriz del sistema es definida positiva pero no necesariamente hermítica. Para ello, considerando la parte hermítica y anti–hermítica de la matriz de coeficientes

$$A = H + S = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*)$$

consideran las particiones

$$A = (\alpha I + H) - (\alpha I - S) = (\alpha I + S) - (\alpha I - H) \tag{12}$$

donde α es una constante positiva. Con ello, construyen el esquema iterativo denominado HSS, cuyo algoritmo es el siguiente.

Algoritmo 6. (HSS). Dado un vector inicial x_0,

1. Para $l = 1, 2, \ldots$, hasta convergencia,
   a) Resolver $(\alpha I + H)x_{l+1/2} = (\alpha I - S)x_{l-1} + b$
   b) Resolver $(\alpha I + S)x_l = (\alpha I - H)x_{l+1/2} + b$

En este caso, la matriz de iteración es

$$T(\alpha) = (\alpha I + S)^{-1}(\alpha I - H)(\alpha I + H)^{-1}(\alpha I - S), \tag{13}$$

totalmente similar a la matriz de la ecuación (11). La convergencia de este método se consigue con las siguientes condiciones.

Teorema 9 *Sea la matriz del sistema* (1) *una matriz compleja definida positiva. Entonces se cumple que el radio espectral de la matriz de iteración* $T(\alpha)$ *está acotado por*

$$\sigma(\alpha) = \text{máx}\left\{\left|\frac{\alpha - \lambda_i}{\alpha + \lambda_i}\right|,\ \lambda_i \in \lambda(H)\right\}$$

y por consiguiente $\rho(T(\alpha)) < 1$*, ya que* $\alpha > 0$*, y por tanto el algoritmo HSS converge a la solución exacta del sistema, para cualquier vector inicial* x_0*.*

El teorema anterior muestra que la velocidad asintótica de convergencia de este algoritmo está acotada por $\sigma(\alpha)$ que sólo depende del espectro de H, $(\lambda(H)$, y no del espectro de la parte anti–hermítica S. Incluso se puede comprobar que

$$||x_{l+1} - x_*|| \leq \sigma(\alpha)||x_l - x_*||,$$

indicando que la reducción del error, en una iteración, está acotada por el mismo factor que el radio espectral de la matriz de iteración. También se puede obtener que el valor óptimo del parámetro α viene dado por el valor $\sqrt{\lambda_{\text{máx}}\lambda_{\text{mín}}}$.

6. Método de Schwarz

Supongamos que se quiere resolver una ecuación en derivadas parciales en un dominio Ω. La técnica de *descomposición de dominios* consiste en considerar varios subdominios del dominio inicial y resolver dicha ecuación en cada subdominio. Estos subdominios pueden ser disjuntos o no y su elección puede venir dada no solamente por conseguir subproblemas de menor tamaño sino también porque el material de cada subdominio sea diferente o porque se quiere utilizar cálculo en paralelo.

Como estamos resolviendo la ecuación (1), consideraremos que dicha ecuación es el resultado de la discretización del problema inicial y no tendremos en cuenta la discretización misma y por tanto tampoco la malla considerada. Por ello, en esta sección consideraremos el punto de vista algebraico del método y no el variacional.

El método de Schwarz, desde el punto de vista algebraico, es un método de descomposición de dominios ya que descompone los vectores considerados del espacio vectorial $\mathbb{E}$, de dimensión n, en vectores de subespacios vectoriales $\mathbb{E}_i$, de dimensión $n_i < n$. Cuando

$$\sum_{i=1}^{N} n_i = n$$

los subdominios son disjuntos, mientras que si

$$\sum_{i=1}^{N} n_i > n$$

los subdominios se solapan, siendo N el número de subdominios considerados.

Para transformar vectores de $\mathbb{E}_i$ en $\mathbb{E}$ o viceversa, consideramos los operadores *prolongación*

$$p_i : \ \mathbb{E}_i \rightarrow \mathbb{E}$$

y los operadores *restricción*

$$r_i : \ \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}_i$$

que vienen representados en las correspondientes bases por las matrices $P_i \in \mathbb{C}^{n\times n_i}$ y $R_i \in \mathbb{C}^{n_i\times n}$, respectivamente. En los dos casos de subdominios considerados, se supone que

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}_i = \mathbb{E}.$$

Si en cada subdominio Ω_i se consideran las submatrices

$$A_i = R_i A P_i,$$

el sistema inicial (1) puede ser descompuesto en varios subsistemas

$$A_i y_i = c_i.$$

Un punto importante a considerar es cómo realizar la construcción de la solución total a partir de las soluciones de los subsistemas. Cuando esta construcción se hace sin mas que sumar las soluciones de cada subdominio se tiene el método de Schwarz *aditivo*, que se puede implementar con el siguiente algoritmo.

Algoritmo 7. (Schwarz aditivo). Dado un vector inicial x_0,

1. Para $l = 1, 2, \ldots$, hasta convergencia,
   a) Hacer $x_l = x_{l-1} + \theta \sum_{i=1}^{N} P_i A_i^{-1} R_i (A x_{l-1} - b)$

donde se ha escrito el factor “damping” $\theta > 0$. En el paso 1.1 del algoritmo se observan las operaciones que se hacen en cada iteración: en cada subespacio, se restringe el vector residuo (cambiado de signo), $r_i = Ax_{l-1} - b$, mediante el operador R_i, se resuelve el problema local $A_i e_i = r_i$, después se prolonga el error local obtenido, se suman todas las soluciones locales y finalmente se añade esta corrección al vector anterior.

En este caso la matriz de iteración es

$$T = I - \theta \sum_{i=1}^{N} P_i A_i^{-1} R_i A.$$

De forma análoga, se puede construir la solución global a partir de las soluciones parciales de cada subespacio de forma multiplicativa, dando lugar al siguiente algoritmo.

Algoritmo 8. (Schwarz multiplicativo). Dado un vector inicial x_0,

1. Para $l = 1, 2, \ldots$, hasta convergencia,
   a) Hacer $x_l = x_{l-1} + \prod_{i=1}^{N} P_i A_i^{-1} R_i (Ax_{l-1} - b)$

Las operaciones que se realizan son las mismas que en el algoritmo 7, excepto la última donde se construye la corrección componiendo las soluciones antes de añadir a la solución anterior. En este caso la matriz de iteración es

$$T = I - \prod_{i=1}^{N} P_i A_i^{-1} R_i A.$$

Una forma particular, aunque natural en muchos casos ([19]), de los operadores restricción y prolongación corresponde al caso en que cada columna de R_i^T está formada por los vectores canónicos sin orden establecido. Por ejemplo, si trabajamos en $\mathbb{R}^6$ y la restricción la hacemos al subespacio $\mathbb{R}^3$, la matriz restricción sería,

$$R_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \Pi_i \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix}, \tag{14}$$

donde Π_i representa una matriz permutación de orden 3.

Para mantener propiedades de simetría se suele trabajar con $P_i = R_i^T$. En estos casos las matrices de los subdominios A_i son submatrices principales de la matriz A.

Cuando no hay solapamiento (subdominios disjuntos) y además la matriz R_i^T se puede escribir como en (14) pero con $\Pi_i = I$ y $P_i = R_i^T$, se tiene que el método aditivo de Schwarz es justamente el método de Jacobi descrito en la sección 3, y el método multiplicativo de Schwarz es el método de Gauss–Seidel, (ver [23]).

Frommer y Szyld [19] dan un resultado de convergencia del método aditivo para M–matrices, cuando hay solapamientos entre subdominios. Para ello, hay que considerar el parámetro q que indica el número de colores necesarios para dibujar cada subdominio Ω_i, de acuerdo con la siguiente regla: si $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, entonces se dibujan con diferentes colores. Normalmente $q < N$.

Teorema 10 *Sea la matriz del sistema* (1) *una M-matriz. Supongamos que las matrices R_i están definidas como en* (14). *Entonces, si $\theta \leq 1/q$, el método aditivo de Schwarz, o equivalentemente, el algoritmo 7, converge a la solución exacta del sistema* (1)*, para cualquier vector inicial x_0.*

Un resultado similar para el método multiplicativo de Schwarz ha sido dado por los mismos autores en [20], que expresamos a continuación. En este caso los autores prueban la convergencia para dos tipos de matrices: M–matrices y simétricas definidas positivas.

Teorema 11 *Sea la matriz del sistema* (1) *una M-matriz (o simétrica definida positiva). Supongamos que las matrices R_i están definidas como en* (14). *Entonces, el método multiplicativo de Schwarz (algoritmo 8) converge a la solución exacta del sistema* (1)*, para cualquier vector inicial x_0.*

Otros resultados similares se encuentran en [3].

7. Consideraciones finales

Como se ha indicado en la introducción los métodos anteriores se utilizan sobre todo como precondicionadores de los métodos basados en subespacios de Krylov. Cuando se precondiciona la matriz A mediante la matriz M de una partición de la forma

$$M^{-1}A = I - T$$

se obtiene la matriz de iteración de alguno de los métodos estudiados. Se puede comprobar que precondicionar de esta forma equivale a resolver un sistema auxiliar donde la matriz de coeficientes es la matriz M.

Como se puede observar en los algoritmos anteriores siempre hay un paso, donde se debe resolver un sistema lineal con una matriz de coeficientes, en el caso más sencillo M. Este sistema se puede resolver invirtiendo M si es una matriz sencilla de invertir como en el caso del método de Jacobi. En otro caso, se puede utilizar un método directo si la estructura de la matriz lo aconseja, por ejemplo, cuando es triangular. También se puede resolver este segundo sistema por una nueva partición, como es el caso del método de dos etapas, o incluso por métodos de tipo subespacios de Krylov.

La teoría de los métodos iterativos basados en particiones tienen diferentes problemas a estudiar. Por ejemplo, en el método en dos etapas, las exigencias en las particiones internas y externas son diferentes. Se puede estudiar la convergencia cuando la partición externa es también débilmente regular.

El método de direcciones alternadas cuando se aproximan los dos sistemas del algoritmo 6 por otras particiones no está estudiado. En el caso de los métodos de Schwarz, la convergencia está dada para M–matrices en los dos algoritmos 7 y 8, y para matrices simétricas definidas positivas para el último algoritmo. Sin embargo, no hay resultados de convergencia para H–matrices.

No se ha comentado nada respecto a la convergencia de sistemas cuando la matriz del mismo no es invertible, ya sea cuadrada o rectangular. En este caso, también hay bastantes resultados análogos a los presentados para sistemas singulares (ver por ejemplo [6] y [27]) pero, de cualquier modo falta mucho por obtener, especialmente en el caso asíncrono.

Agradecimientos: Quiero agradecer a los profesores y compañeros Joan Josep Climent, José Marín, Violeta Migallón, José Penadés y Carmen Perea por proporcionarme ideas para desarrollar este trabajo así como sugerencias que, sin duda, han mejorado la comprensión del mismo. En las tesis doctorales de todos ellos, se encuentran otros resultados relacionados con el tema. También quiero agradecer a Enrique Fernandez-Cara y José Mas las sugerencias que han hecho sobre la versión preliminar. Finalmente, agradecer a la Dirección General de Investigación DGI y otros organismos oficiales que continuamente han subvencionado nuestra labor, actualmente con el proyecto BFM 2001–2641.

Referencias

[1] Z.-Z. Bai, A class of two–stage iterative methods for systems of weakly nonlinear equations, *Numerical Algorithms*, 14: 295–319, 1997.

[2] Z.-Z. Bai, G.H. Golub y M.K. Ng, Hermitian and skew–hermitian splitting methods for non–hermitian positive definite linear systems, *SIAM J. on Matrix Analysis*, aparecerá, 2002.

[3] M. Benzi, A. Frommer, R. Nabben y D.B. Szyld, Algebraic theory of multiplicative Schwarz methods, *Numerische Mathematik*, 89: 605–639, 2001.

[4] M. Benzi y D.B. Szyld, Existence and Uniqueness of splittings for stationary iterative methods with applications to alternating methods, *Numerische Mathematik*, 76: 309– 321, 1997.

[5] A. Berman y R.J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, SIAM, Philadelphia, Pensilvania, 1994. 77–106, 1998.

[6] R. Bru, R. Cantó y J.J. Climent, On M–multisplittings of singular M–matrices with applications to Markov chains, *Numerical Linear Algebra with Applications*, 5: 299–311, 1998.

[7] R. Bru, L. Elsner y M. Neumann, Models of parallel chaotic iteration methods, *Linear Algebra and its Applications*, 13: 175–192, 1988.

[8] R. Bru, D. Ginestar, T. Manteuffel, J. Marín, J. Mas y G. Verdú, Iterative schemes for the neutron diffusion equations, *Computers and Mathematics with Applications*, aparecerá, 2002.

[9] R. Bru, V. Migallón y J. Penadés, Chaotic methods for the parallel solution of linear systems, *Computing Systems in Engineering*, 6(4/5): 385–390, 1995.

[10] R. Bru, V. Migallón, J. Penadés y D.B. Szyld, Parallel, syncronous and asyncronous two–stage multisplitting methods, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 3: 24–38, 1995.

[11] M. Castel, V. Migallón y J. Penadés, Convergence of non-stationary parallel multisplitting methods for Hermitian positive definite matrices, *Mathematics of Computations*, 67(221): 209–220, 1998.

[12] M. Castel, V. Migallón y J. Penadés, On parallel two-stage methods for Hermitian positive definite matrices with applications to preconditioning, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 12: 88–112, 2001.

[13] V. Conrad e Y. Wallach, Alternating methods for sets of linear equations, *Numerische Mathematik*, 32: 1105–108, 1979.

[14] J.J. Climent y C. Perea, Some comparison theorems for weak nonnegative splittings of bounded operators, *Linear Algebra and its Applications*, 275/276: 77–106, 1998.

[15] J.J. Climent y C. Perea, Convergence and comparison theorems for multisplittings. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 6: 93– 107, 1999.

[16] J.J. Climent y C. Perea, Convergence and comparison theorems for a generalized alternating iterative method. *Applied Mathematics and Computation*, Aparecerá finales del 2002 o principios del 2003.

[17] A. Frommer y G. Mayer, Convergence of relaxed parallel multisplitting methods, *Linear Algebra and its Applications*, 119: 141–152, 1989.

[18] A. Frommer y D.B. Szyld, H–splittings and two–stage iterative methods, *Numerische Mathematik*, 63: 345–356, 1992.

[19] A. Frommer y D.B. Szyld, Weighted max norms, splittings and overlapping additive Schwarz iterations, *Numerische Mathematik*, 83: 259–278, 1999.

[20] A. Frommer y D.B. Szyld, An algebraic convergence theory for restricted additive Schwarz methods using matrix max norms, *SIAM J. Numerical Analysis*, 39(2): 463–479, 2001.

[21] G.H. Golub y M.L. Overton, Convergence of a two–stage Richarson iterative procedure for solving systems of linear equations, *en Numer. Anal., G.A. Watson, ed., Proc. of the ninth Biennial Conference, Dundee, Scontland, 1981, Lecture Notes in Mathematics 912*, Springer Verlag, New York, 128–139, 1982.

[22] G.H. Golub y M.L. Overton, The convergence of inexact Chebyshev and Richarson iterative methods for solving linear systems, *Numerische Mathematik*, 53: 571–593, 1988.

[23] W.Hackbusch, *Iterative solutions of large sparse systems of equations*, Springer–Verlag, New York, New York, 1994.

[24] P. Lancaster y L. Tismeneski, *The theory of matrices*, Academic press, New York, New York, 1985.

[25] P.J. Lanzkron, D.J. Rose y D.B. Szyld, Convergence of nested clasical iterative methods for linear systems, *Numerische Mathematik*, 58: 685–602, 1991.

[26] G.I. Marchuk, Splitting and alternating direction methods, *en Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet y J.L. Lions, ed., volumen I*, North Holland, New York, 1990.

[27] I. Marek y D.B. Szyld, Comparison theorems for the convergence factor of iterative methods for singular matrices. *Linear Algebra and its Applications*, (en prensa).

[28] J. Mas, V. Migallón, J. Penadés y D.B. Szyld, Nonstationary parallel relaxed multisplitting methods, *Linear Algebra and its Applications*, 241–243: 733–747, 1996.

[29] V. Migallon y J. Penadés, Convergence of two-stage iterative methods for Hermitian positive definite matrices. *Applied Mathematics Letters*, 10(3): 79–83, 1997.

[30] R. Nabben, A note on comparison theorems for splittings and multisplittings of Hermitian positive definite matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 233: 67–80, 1996.

[31] N.K. Nichols, On the convergence of two-stage iterative processes for solving linear equations, *SIAM J. Numerical Analysis*, 10: 215–227, 1984.

[32] D.P. O'Leary y R.E. White, Multi–splittings of matrices and parallel solution of linear systems, *SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods*, 6: 630–640, 1985.

[33] J.M. Ortega, *Introduction to parallel and vector solution of linear systems*, Plenum Press, New York, New York, 1988.

[34] J.M. Ortega, *Numerical Analysis: A secod course*, SIAM, Philadelphia, Pensilvania, 1990.

[35] D. Peaceman y H. Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 3: 28–41, 1955.

[36] C. Perea, *Teoremas de convergencia y comparación para particiones y multiparticiones*, Tesis doctoral, Univ. de Alicante, 1998.

[37] R. Varga, *Matrix iterative analysis*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966. Segunda versión publicada por Springer–Verlag, 2000.

[38] R. Varga, On recurring theorems on diagonal dominance, *Linear Algebra and its Applications*, 13: 1–9, 1976.

[39] Z.I. Woźnicki, Nonnegative splitting theory. *Japan Journal on Industrial and Applied Mathematics*, 11: 289–342, 1994.