Representación de sistemas multivariables: Matriz de Transferencia

Antonio Sala

Control de Sistemas Complejos

Universitat Politècnica de València

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**mdt**.html

Introducción

Motivación: Un sistema monovariable, ante c.i. nulas, en Transformada de Laplace verifica $y(s) = G(s)u(s)$. ¿Cómo expresar la misma idea en caso multivariable?

Objetivos: Comprender la interpretación de una matriz de transferencia para modelado y control MIMO.

Contenido:
Definiciones. Superposición. Ecuaciones del sistema en forma matricial. Ejemplos. Conclusiones.

Definiciones básicas

Los modelos entrada-salida de sistemas multivariables relacionan un **vector** de salidas $y(t) \in \mathbb{R}^q$ con un vector de entradas $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Ante condiciones iniciales nulas, el efecto sobre la salida y_i de la entrada u_j puede modelarse con una función de transferencia (cociente de polinomios): $y_i(s) = g_{ij}(s) \cdot u_j(s)$ si resto $u_k(s) = 0$, $k \neq j$.

Si el sistema es **lineal**, entonces se puede aplicar **superposición**: el efecto combinado sobre una salida y_i (i cualquiera) de todas las entradas es la **suma** de los efectos individuales de cada u_j.

Ejemplo: Si cierta temperatura está numerada como "salida 3", podemos escribir:

$$\underbrace{T(s)}_{y_3} = \underbrace{\frac{1}{4s+1}}_{g_{31}} \cdot \underbrace{T_{ext}(s)}_{u_1} + \underbrace{\frac{2.5}{4s+1}}_{g_{32}} \cdot \underbrace{Q(s)}_{u_2}$$

Definiciones básicas

Por superposición, aplicando a todas las salidas

$y_1 = g_{11}(s)u_1(s) + g_{12}(s)u_2(s) + \cdots + g_{1m}(s)u_m(s)$,

$y_2 = g_{21}(s)u_1(s) + g_{22}(s)u_2(s) + \cdots + g_{2m}(s)u_m(s)$, etc.:

$$y_i = g_{i1}(s)u_1(s) + g_{i2}(s)u_2(s) + \cdots + g_{im}(s)u_m(s), \qquad i = 1, \ldots, q$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \ldots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \ldots & g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{q1}(s) & g_{q2}(s) & \ldots & g_{qm}(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$y(s)_{q\times 1} = \underbrace{G(s)_{q\times m}}_{\text{Matriz de Transferencia}} \cdot u(s)_{m\times 1}$$

Ejemplos

Sistema de una salida y dos entradas $MC_e \frac{dT}{dt} = \kappa(T_{ext} - T) + Q$:

$$\frac{MC_e}{\kappa} \cdot sT + T = T_{ext} + \frac{1}{\kappa} Q, \qquad T = \frac{1}{\frac{MC_e}{\kappa} s+1} T_{ext} + \frac{\frac{1}{\kappa}}{\frac{MC_e}{\kappa} s+1} Q$$

$$\underbrace{T(s)}_{y} = \underbrace{\frac{1}{4s+1}}_{g_{11}} \cdot \underbrace{T_{ext}(s)}_{u_1} + \underbrace{\frac{2.5}{4s+1}}_{g_{12}} \cdot \underbrace{Q(s)}_{u_2}$$

en forma matricial

$$\underbrace{T(s)}_{y_{1\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{4s+1}}_{g_{11}} & \underbrace{\frac{2.5}{4s+1}}_{g_{12}} \end{pmatrix}}_{G(s)_{1\times 2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} T_{ext}(s) \\ Q(s) \end{pmatrix}}_{u_{2\times 1}}$$

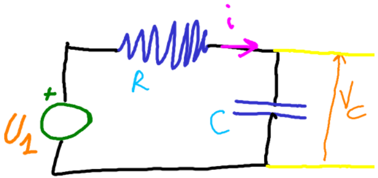
Ejemplos (II)

Sistema de dos salidas y una entrada: Circuito RC serie, nos interesan intensidad y tensión en condensador.

$$i = (u - V_c)/R,\ \frac{dV_c}{dt} = \frac{i}{C} \quad \to \quad s \cdot V_c = \frac{i}{C}$$

$$i = (u - \tfrac{i}{Cs})/R,\ (1 + \tfrac{1}{RCs})i = u/R,$$

$$i = \frac{Cs}{RCs+1}u,\ V_c = \frac{i}{Cs} = \frac{1}{RCs+1}u$$



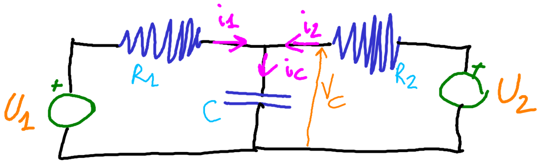
En forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} i(s) \\ V_c(s) \end{pmatrix}}_{y(s)_{2\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\dfrac{Cs}{RCs+1}}_{g_{11}} \\ \underbrace{\dfrac{1}{RCs+1}}_{g_{21}} \end{pmatrix}}_{G(s)_{2\times 1}} \cdot U(s)_{1\times 1}$$

Ejemplos (III)

Sistema de tres salidas y dos entradas: Circuito RCR en T, nos interesan dos intensidades y tensión en condensador.

$$i_1 = (U_1 - V_c)/R_1,\ i_2 = (U_2 - V_c)/R_2$$
$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{i_1+i_2}{C} \quad \rightarrow \quad V_c = \frac{i_1+i_2}{Cs},$$
$$\left(1 + \frac{1}{R_1 C s}\right) i_1 + \frac{1}{R_1 C s} i_2 = \frac{U_1}{R_1}$$
$$\frac{1}{R_2 C s} i_1 + \left(1 + \frac{1}{R_2 C s}\right) i_2 = \frac{U_2}{R_2}$$



En forma matricial, operando:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \\ V_c(s) \end{pmatrix}}_{y(s)_{3\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{C R_2 s+1}{R_1+R_2+C R_1 R_2 s} & -\frac{1}{R_1+R_2+C R_1 R_2 s} \\ -\frac{1}{R_1+R_2+C R_1 R_2 s} & \frac{C R_1 s+1}{R_1+R_2+C R_1 R_2 s} \\ \frac{R_2}{R_1+R_2+C R_1 R_2 s} & \frac{R_1}{R_1+R_2+C R_1 R_2 s} \end{pmatrix}}_{G(s)_{3\times 2}} \cdot \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

Interpretación de una MdT

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \dots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \dots & g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{q1}(s) & g_{q2}(s) & \dots & g_{qm}(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$y(s)_{q\times 1} = \underbrace{G(s)_{q\times m}}_{\text{Matriz de Transferencia}} \cdot u(s)_{m\times 1}$$

- La **FILA** i indica el efecto sobre la **SALIDA** i de cada una de las entradas
- La **COLUMNA** j indica el efecto de la **ENTRADA** j sobre cada una de las salidas.
- Los elementos $g_{ij} = 0$ indican que no hay influencia de la entrada j sobre la salida i.

Conclusiones

- La MdT es una representación de sistemas multivariables lineales.
- Se obtiene de un modelo teórico "haciendo Transf. Laplace y despejando", como en el caso monovariable.
- La representación en Matriz de Transferencia generaliza $y(s) = G(s)u(s)$ al caso de u, y vectores, por "superposición".
- Interesante para "entender" la respuesta de cada salida ante cada entrada (`step`, `bode`,. . .), para explicarla (una a una) a técnicos no expertos en control, para entender las interacciones en forma de diagrama de bloques con elementos sencillos (si hay muchos elementos cero), o para identificar experimentalmente.
- [-] Con muchas entradas y salidas, resulta más "engorrosa" de manipular que la representación en variables de estado normalizada.