



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Métodos iterativos

Damián Ginestar Peiró

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad Politécnica de Valencia

Curso 2010-2011

- 1 Introducción
- 2 Conceptos básicos
- 3 Métodos iterativos estacionarios
- 4 Precondicionadores
 - Introducción
 - Precondicionadores clásicos

Dada una matriz invertible de tamaño $n \times n$ y un vector $b \in \mathbb{R}^n$ la única solución del sistema

$$Ax = b$$

es

$$x = A^{-1}b$$

- Nosotros trabajaremos con matrices vacías (sparse) es decir matrices con un número de elementos no nulos ($\text{nz}(A)$) del orden

$$\text{nz}(A) = c \cdot n$$

con c independiente de n .

- No se puede hacer la inversión de A ya que:
 - 1 A^{-1} puede dejar de ser vacía, es decir se llena, \implies no se puede almacenar.
 - 2 Cálculo de A^{-1} puede costar $O(n^3)$ operaciones (tiempo de CPU: años).
- Buscaremos métodos aproximados para la resolución del sistema que se basan esencialmente en el producto **matriz-vector**.

- Un método iterativo obtiene una solución aproximada de $Ax = b$ construyendo una sucesión de vectores:

$$x_1, x_2, \dots, x_k$$

desde un vector inicial **arbitrario** x_0 .

- Un método iterativo se dice **convergente** si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x .$$

- El vector **error**, en cada iteración, se define como

$$e_k = x - x_k .$$

- El vector **residuo**, en cada iteración, se define como

$$r_k = b - Ax_k .$$

- Se puede probar

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|r_k\| = 0$$

- Un método iterativo nunca da la solución **exacta** incluso en precisión infinita.
- Los métodos directos teóricamente producen la solución exacta; pero en un ordenador dan errores numéricos.
- Se da a priori una precisión para nuestra solución. Sea TOL el error máximo permitido.

$$\|e_k\| < TOL, \text{ (error absoluto)} \quad \text{o} \quad \frac{\|e_k\|}{\|x\|} < TOL \text{ (error relativo)}$$

- Pero x , y e_k no son conocidos el *criterio de parada* no es útil.
- Se utiliza el criterio del *residuo*

$$\|r_k\| < TOL \text{ (absoluto)} \quad \text{o} \quad \frac{\|r_k\|}{\|b\|} < TOL \text{ (relativo)}$$

- La relación entre el error y el residuo es

$$r_k = b - Ax_k = Ax - Ax_k = Ae_k .$$

- Usando normas matriciales:

$$\|r_k\| \leq \|A\| \|e_k\| \quad (1a); \quad \|e_k\| \leq \|A^{-1}\| \|r_k\| \quad (1b)$$

- Notar además

$$\|x\| \leq \|A^{-1}\| \|b\| \quad (2a); \quad \|b\| \leq \|A\| \|A^{-1}b\| = \|A\| \|x\| \quad (2b)$$

- Combinando (1a) con (2a) y (1b) con (2b) obtenemos

$$\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|} \frac{\|r_k\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e_k\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|r_k\|}{\|b\|}$$

- Finalmente, recordando que $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$:

$$\frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|r_k\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e_k\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r_k\|}{\|b\|}$$

Conclusión: Test del residuo es fiable si $\kappa(A)$ no es muy grande.

Métodos iterativos estacionarios

Sea A la matriz del sistema $Ax = b$. Podemos considerar la **partición (splitting)**

$$A = M - N$$

donde $M \neq A$ es una matriz invertible.

Se construye el sistema iterativo

$$x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b = Hx_k + q, \quad k = 0, 1, \dots$$

donde H es la matriz **de iteración** y x_0 el vector **inicial**.

Definición

Se dice que un método iterativo es **estacionario** si la matriz de iteración H es constante en todo el proceso.

Métodos iterativos estacionarios

- Sea A tal que $a_{ii} \neq 0$ y consideremos la partición

$$A = L + D + U$$

- L es la parte estrictamente triangular superior de A ,
- D es la parte diagonal de A ,
- U es la parte estrictamente triangular inferior de A .

- 1 Método de **Jacobi**: $M = D$ y $N = -(L + U)$

$$x_{k+1} = -D^{-1}(L + U)x_k + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots$$

- 2 Método de **Gauss-Seidel**: $M = D + L$ y $N = -U$

$$x_{k+1} = -(D + L)^{-1}Ux_k + (D + L)^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots$$

- Una iteración de Jacobi es muy *barata*. Sólo hay que hacer multiplicación matriz-vector “vacía”. El número de multiplicaciones es del orden $\text{nz}(A)$ además de invertir los elementos diagonales de A .

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} \left\{ -a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1 \right\}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}} \left\{ -a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2 \right\}$$

⋮

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}} \left\{ -a_{n1}x_1^k - a_{n3}x_3^k - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^k + b_n \right\}$$

- Una iteración Gauss-Seidel es *barata*. Además tiene que resolver un sistema triangular inferior $(D + L)x_{k+1} = b - Ux_k$ “vacío”. Recordar que hay que evitar invertir matrices.
- En el método de Gauss-Seidel las componentes de x_{k+1} que ya conocemos se utilizan en la propia iteración $k + 1$.

Teorema

Sea A invertible. Un método iterativo estacionario converge, para cualquier vector inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a la solución exacta del sistema lineal, si y sólo si,

$$\rho(H) < 1$$

es decir, el mayor valor propio en valor absoluto de la matriz de iteración es menor que uno.

Definición

Una matriz $A = [a_{ij}]$ de tamaño $n \times n$ se dice que es **estrictamente diagonal dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema

Si la matriz A es estrictamente diagonal dominante entonces el método de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes.

- Se llama **radio de convergencia** a $R = -\log_{10}(\rho(H))$. Cuanto más pequeño sea $\rho(H)$ mayor será la convergencia.

Métodos iterativos estacionarios

Podemos definir otra descomposición de la matriz A de la forma

$$\omega A = (D + \omega L) - (-\omega U + (1 - \omega)D),$$

que da lugar al método iterativo conocido como el método SOR (successive over relaxation)

$$(D + \omega L)x^{k+1} = (-\omega U + (1 - \omega)D)x^k + \omega b,$$

Análogamente, se puede definir otro método SOR de la forma

$$(D + \omega U)x^{k+1} = (-\omega L + (1 - \omega)D)x^k + \omega b.$$

Un método SOR simétrico, SSOR, viene definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned}(D + \omega L)x^{k+1/2} &= (-\omega U + (1 - \omega)D)x^k + \omega b, \\(D + \omega U)x^{k+1} &= (-\omega L + (1 - \omega)D)x^{k+1/2} + \omega b.\end{aligned}$$

Lema de Kahan

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con elementos diagonales no nulos. Entonces el método SOR converge solamente si

$$0 < \omega < 2$$

Precondicionadores. Introducción

- Precondicionar un sistema lineal no es otra cosa que (pre)multiplicar el sistema por una matriz nonsingular, denotada por M^{-1} ,
- Produce el sistema equivalente

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b$$

- Qué hay que tener en cuenta para elegir el preconditionador?
 - Condicionar mejor el sistema inicial,
 - El preconditionador M^{-1} , debe ser fácil de invertir, es decir, debe producir un sistema lineal

$$My = c$$

fácil de resolver.

- **Precondicionador de Jacobi**

$M = D$ donde D es la matriz diagonal $D = \text{diag}(A)$, es decir,
 $d_{ij} = a_{ij}$

Cálculo de $M^{-1}r_{k+1}$ cuesta $O(n)$ operaciones: muy barato.

- **Factorización incompleta de Cholesky**

$M = \tilde{L}\tilde{L}^T$ donde \tilde{L} es una aproximación del factor triangular obtenido por la factorización de Cholesky. Tenemos que resolver un sistema con la matriz M queremos que L sea lo mas vacía posible. Para ello se permite que \tilde{L} tenga los elementos no cero en las posiciones donde los tiene A , esto es

$$a_{ij} = 0 \implies l_{ij} \equiv 0, \quad IC(0)$$

- **LU incompleta**

Se construye $M = \tilde{L}\tilde{U}$ donde \tilde{L} es una matriz vacía triangular inferior que aproxima a L y \tilde{U} es una matriz vacía triangular superior que aproxima a U .

Precondicionadores clásicos

Fijado un subconjunto $S \subset [1, \dots, n] \times [1, \dots, n]$ de posiciones de elementos en la matriz, entonces

$$a_{ij} := \begin{cases} a_{ij} - a_{ik} a_{kk}^{-1} a_{kj} & \text{si } (i, j) \in S \\ a_{ij} & \text{si } (i, j) \notin S \end{cases}$$

da una factorización incompleta de A que mantiene las propiedades (SPD).

- Si se hace una factorización LU con el mismo patrón de ceros que la matriz A se obtiene el preconditionador ILU(0). ILU(m), si se permite que se llenen m posiciones en cada fila.
- La factorización incompleta puede fallar incluso si la matriz inicial admite factorización.
- El fallo ocurre cuando $a_{kk} = 0$. Sin embargo, en la práctica es raro que hayan fallos.