1.9. Ejercicios del Capítulo 1

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. Ecuaciones diferenciales separables

   (a) $\frac{dy}{dx} = (\cos(x))^2(\cos(2y))^2$.

   (b) $(1+x)dx + (e^x dx + e^{2y}dy)(1+x^2) = 0$.

   (c) $y' = y^2, y(0) = 1$

2. Homogéneas y reducibles

   (a) $y' = \frac{x^2+3y^2}{2xy}$

   (b) $y' = \frac{(x\cos(\frac{y}{x})+y\sin(\frac{y}{x}))y}{(y\sin(\frac{y}{x})-x\cos(\frac{y}{x}))x}$

3. Exactas y factor integrante

   (a) $(y^2e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0$

   (b) $\left(xy^2 - \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)dx + x^2ydy = 0.$

   (c) $ydx - xdy + \ln(x)dx = 0$

4. Ecuaciones lineales, Bernoulli y Riccati

   (a) $y' = \frac{6}{5} - \frac{12}{150-6t}y$.

   (b) $y' = -\frac{1}{75+5t}y$.

   (c) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$.

   (d) $y' + \frac{1}{x}y = 2x^{3/2}y^{1/2}$.

   (e) $y' = 4 + 2x - x^2 + x(x-1)y - y^2, \qquad y_p = ax + b.$

   (f) $x^2(y' + y^2) + xy = 1, \qquad y_p = -\frac{1}{x}.$

5. Ecuaciones resolubles en x, y, y'

   (a) $(y')^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$

   (b) $y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$

   (c) $y = \frac{1}{2}xy' + \frac{3}{2}x(y')^{-1}$

   (d) $y = xy' + \frac{a^2}{(y')^2}$

   (e) $y = (y' + (y')^{-1})x + (y')^2$.

   (f) $y + 8y'(xy' - y + 1) - 1 = 0$

   (g) $x = 2\frac{y'-1}{(y')^2+y'}y$

6. Trayectorias isogonales

(a) Curvas que formen un ángulo, $w = \frac{\pi}{4}$ con las curvas $y = Cx$.

(b) Trayectorias ortogonales a: $y = Cx^2 + C$.

(c) Trayectorias ortogonales a: $4y^3 = C\sin(3x) - 3$.

7. Halla la curva que pasa por el punto $A(3,6)$ y tiene la propiedad de que la distancia desde el origen de coordenadas a la recta tangente a dicha curva en un punto es igual a la abscisa de ese punto.

8. Un tanque A contiene 150 l de una solución de ácido nítrico al 0,5 %. Simultáneamente se introduce en él una solución de ácido al 20 % a una velocidad de 6 l/min y se extraen 12 l/min de la mezcla, la cual es removida continuamente. Cuánto tiempo pasará hasta que el porcentaje de ácido nítrico contenido en A sea del 10 %? Si en dicho instante se corta la salida de líquido, y todo lo extraído ha sido pasado a un tanque B inicialmente vacío, calcula el porcentaje de ácido en B.

9. Un tanque con una capacidad máxima de 100 l contiene 4 kg de sal disueltos en un 75 l de agua. Simultáneamente se comienza a introducir agua destilada a una velocidad de 10 l/min y a extraer 5 l/min de la mezcla. Qué cantidad de sal permanece en el tanque cuando éste alcanza el 100 % de su capacidad?

10. Un tanque A contiene 50 kg de sal disueltos en un 200 l de agua. Simultáneamente se comienza a introducir el contenido de un tanque B, con una capacidad máxima de 300 l, que inicialmente tiene 100 l de agua destilada, a una velocidad de 4 l/min, y a pasar 6 l/min en sentido inverso del tanque A al B. Ambos tanques son removidos continuamente para asegurar una mezcla perfecta. Cuál es la cantidad de sal que permanece en el tanque A tras 60 min?

11. Si al comprar un piso se hace una hipoteca de x_0 miles de euro a un interés del p % y que se desea amortizar en T años aportando una cantidad de A miles de euro/año de forma continua a lo largo de todo el tiempo. Hallar la relación entre todos los parámetros, así como la cantidad total que se habrá pagado.

1.10. Solución de los Ejercicios del Capítulo 1

1. **4**. Ecuaciones diferenciales separables

   (a) $\frac{1}{2}\tan(2y) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$.

   (b) $e^{2y} = 2arc\tan(x) + \ln(1+x^2) + 2e^x + C$.

   (c) $y = \frac{1}{1-x}$.

2. Homogéneas y reducibles

   (a) $y^2(x) = -x^2 + x^3 C_1$

   (b) $y(x)\left(\cos\frac{y(x)}{x}\right)x = C_1$

3. Exactas y factor integrante

   (a) $e^{xy^2} + x^4 - y^3 = C$.

   (b) $\left(xy^2 - \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)dx + x^2 y dy = 0$.

   (c) Factor integrante: $\mu = \frac{1}{x^2}$. Solución: $y = Cx - \ln(x) - 1$.

4. Ecuaciones lineales, Bernoulli y Riccati

   (a) Ejercicio 8.

   (b) Ejercicio 9.

   (c) $y = \sqrt{\dfrac{x}{C\,x^5 - 1}}$.

   (d) $y = \left(\frac{C}{x} + \frac{4}{7}x^{5/2}\right)^2$.

   (e) $y(x) = x + b + \frac{2(b+1)}{2(b+1)\exp(2(b+1)x)C - 1}$.

   (f) $y = \frac{2x}{C+x^2} - \frac{1}{x}$

5. Ecuaciones resolubles en x, y, y'

   (a) $(y - C\exp(x + 2e^{x/2}))(y - C\exp(x - 2e^{x/2})) = 0$

   (b)

   (c) $y(x) = \frac{C}{2}x^2 + \frac{3}{2C}$

   (d)

   (e) $\begin{cases} y = (p + \frac{1}{p})x + p^2 \\ x = Cpe^{-p^2/2} - 2p \end{cases}$

   (f)

   (g) $\begin{cases} Cy^3 = (p-3)p^4 \\ x = 2\frac{p-1}{p^2+p}\,y \end{cases}$

6. Trayectorias isogonales

   (a) La ED a resolver es: $y' = \frac{x+y}{x-y} \;\Rightarrow\; \sqrt{(x^2 + y^2(x))} = C \exp\left(\arctan \frac{y(x)}{x}\right)$

   (b) $2y^2 = -x^2 - \ln|x| + C$ (no corta el eje OY $\quad (x = 0)$).

   (c) $\frac{1}{3}\ln(\cos(3x)) = \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4y} + C$

7. Vector posición $\mathbf{v} = (x, y)$. Vector en la dirección de la tangente: $\mathbf{v}' = (1, y')$. Vector perpendicular a la tangente: $\mathbf{u} = (1, \frac{-1}{y'})$.

$$distancia = \left| \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \mathbf{v} \right| = x \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

   (homogénea)

$$y^2 = x(C - x) \quad \Rightarrow \quad A(3, 6) \quad \Rightarrow \quad y^2 = x(15 - x)$$

8. $y' = \frac{6}{5} - \frac{12}{150-6t}y, \quad \Rightarrow \quad y(t) = 36t^2C_1 - 1800tC_1 - \frac{6}{5}t + 22\,500C_1 + 30$

   Condiciones iniciales: $y(0) = \frac{1/2}{100}150 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{117}{2500}t^2 + \frac{57}{50}t + \frac{3}{4}$

9. $y = -\frac{1}{75+5t}y, \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt[5]{(75+5t)}}C_1$

   $y(0) = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt[5]{75}}C_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 4\left(\frac{75}{75+5t}\right)^{1/5}$

10. $y = 4\frac{50-y}{100+2t} - 6\frac{y}{200-2t}$,
    $y(t) = -2\left(-1250 + 50t + 10\,000C_1 - 200tC_1 + t^2C_1\right)\frac{-100+t}{2500+100t+t^2}$
    $y(0) = 50 \quad \Rightarrow \quad -2\left(-1250 + 10\,000C_1\right)\frac{-100}{2500} = 50 \quad \Rightarrow \quad -100 + 800C_1 = 50 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{3}{16}$.

11. Si $x(t)$ denota el capital restante por amortizar en cada momento, la ED es: $x' = \alpha x - A$ con $\alpha = \frac{p}{100}$. Luego

$$x(t) = e^{\alpha t}\left(x_0 - \frac{A}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\right).$$

   Amortizar el préstamo en $t = T$ implica que $x(T) = 0$, luego

$$T = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{A}{A - \alpha x_0}\right)$$

   y la cantidad total que se habrá pagado es

$$X_{total} = A \cdot T = \frac{A}{\alpha}\ln\left(\frac{A}{A - \alpha x_0}\right).$$