3.1. Ejercicios del Capítulo 3

Ejercicios del libro, página 75.

1. Integra: $\mathrm{D}\left\{\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right\} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right\}$

   Solución:

$$\left\{\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right\} = C_1 \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right\} + C_2 \mathrm{e}^{4t} \left\{\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right\} + C_3 \mathrm{e}^{9t} \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -\frac{5}{2} \end{array}\right\}$$

2. Integra los siguientes sistemas de EDs

   (a) $\left.\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} & = & \sqrt{2}y + z \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} & = & y + z \end{array}\right\}$, o bien $\mathrm{D}\left\{\begin{array}{c} y \\ z \end{array}\right\} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{c} y \\ z \end{array}\right\}$

   Sol.:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{7 - 2\sqrt{2}}}{2}; \left\{\begin{array}{c} y \\ z \end{array}\right\} = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \left\{\begin{array}{c} \lambda_1 - 1 \\ 1 \end{array}\right\} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \left\{\begin{array}{c} \lambda_2 - 1 \\ 1 \end{array}\right\}$$

   (b) $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + x & = & \mathrm{e}^t \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} & = & 1 \end{array}\right.$

   Solución: $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \mathrm{e}^t - \frac{t^3}{6} + C_1 \frac{t^2}{2} + C_2 t + C_3 \\ y(t) = -\mathrm{e}^t + \frac{t^4}{24} - C_1 \frac{t^3}{6} + (1 - C_2)\frac{t^2}{2} - (C_1 + C_3)t + C_4 \end{array}\right.$

   (c) $\mathrm{D}\left\{\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right\} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{8} & 2 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right\}$. Halla los valores y vectores propios, e indica como sería la solución general.

   Solución: $\lambda_1 = 1$ (doble con un solo vector propio), $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$.

   (g) $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 6x + 8y & = & \mathrm{e}^{3t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - x & = & 0 \end{array}\right.$

   Solución:

$$\left\{\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right\} = \left(C_1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t\right) \mathrm{e}^{2t} \left\{\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right\} + \left(C_2 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\right) \mathrm{e}^{4t} \left\{\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right\}$$

   (i) $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} & = & y + z + x \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} & = & -4y - 3z + 2x \end{array}\right.$

Solución: Valor propio doble, pero con un solo vector propio.

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} = c_1(x) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \right\} \mathrm{e}^{-x} + c_2(x) \left\{ \begin{array}{c} x \\ 1-2x \end{array} \right\} \mathrm{e}^{-x}.$$

Las funciones $c_1(x), c_2(x)$ se obtienen por variación de constantes: $c_1(x) = (-9 + 9x - 4x^2)\mathrm{e}^x,\ c_2(x) = (4x - 4)\mathrm{e}^x$.

3. Resuelve por el método de eliminación

$$\left. \begin{array}{rcl} \ddot{x} - 3x - 4y & = & -3 \\ \ddot{y} + x + y & = & -5 \end{array} \right\} \qquad x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ \dot{x} = 0,\ \dot{y}(0) = 0.$$

Solución: $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^t - 1)(23(\mathrm{e}^{-t} - 1) + 13t(\mathrm{e}^{-t} + 1)) \\ x & = & \frac{1}{4}(\mathrm{e}^t - 1)(36(\mathrm{e}^{-t} - 1) + 13t(\mathrm{e}^{-t} + 1)) \end{array} \right.$

Otros ejercicios.

1. Resuelve

$$\left. \begin{array}{rcl} x' & = & 2x - y \\ y' & = & x + 2y \end{array} \right\}$$

(a) Matricialmente.
(b) Por el método de reducción

Solución: $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \mathrm{e}^{2t}(C_1 \cos(t) + C_2 \operatorname{sen}(t)) \\ y(t) = \mathrm{e}^{2t}(-C_2 \cos(t) + C_1 \operatorname{sen}(t)) \end{array} \right.$

2. Resuelve el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2x - 2y \\ y' & = & 2x - 3y + t \end{array} \right.$$

a) Resuelve primero matricialmente el sistema homogéneo asociado.
b) Resuelve el sistema no homogéneo por el método de variación de constantes.

Solución: $\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} = \left(C_1\mathrm{e}^{-2t} - \frac{2t+3}{10}\right) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\} + \left(C_2\mathrm{e}^{t} - \frac{t+1}{5}\right) \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\}$

3. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -3x - y \\ y' & = & 8x + 3y + \mathrm{e}^t \end{array} \right. \qquad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$$

Solución: $\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} = \left(C_1 + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}\right) \mathrm{e}^{-t} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \right\} + \left(C_2 + \frac{1}{2}t\right) \mathrm{e}^{t} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -4 \end{array} \right\}$