Práctica 1

Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1. Introducción

Para resolver una ecuación diferencial en la forma

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \text{o bien} \qquad y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

el *Mathematica* dispone del comando *DSolve*, cuya estructura es

```
DSolve[eqn,y[t],t]
```

aunque hay que tener presente que en muchos casos no es posible obtener la solución.

Ejemplo 1.1.1 *La ecuación diferencial*

$$y' + 2y = t \tag{1.2}$$

cuya solución es: $y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + C\,e^{-2t}$*, donde* C *es la constante arbitraria, se obtiene con el Mathematica con la instrucción*

```
In[]:= DSolve[y'[t]+2y[t]==t,y[t],t]
```

obteniendo, como solución

$$Out[] := \{\{y[t] \to -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + e^{-2t}\ C[1]\}\}$$

donde $C[1]$ es la constante arbitraria. Si hubiera más constantes arbitrarias independientes éstas se denotarán por $C[2]$, $C[3]$, etc.

Si el problema es de condiciones iniciales

$$y' + 2y = t, \qquad y(0) = 1 \tag{1.3}$$

cuya solución es: $y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{5}{4}e^{-2t}$, la cual se puede obtener con

```
In[]:= DSolve[{y'[t]+2y[t]==t,y[0]==1},y[t],t]
```

dando

$$Out[] := \{\{y[t] \to \frac{1}{4}e^{-2t}(5 - e^{2t} + 2e^{2t}t)\}\}$$

Se puede comprobar es esta solución es equivalente a la anterior.

Si queremos utilizar en otras operaciones la solución de la ecuación diferencial (obsérvese que aparece una flecha y no un igual) es útil utilizar la instrucción *Flatten*

```
In[]:= resul=DSolve[{y'[t]+2y[t]==t,y[0]==1},y[t],t];
       regla = Flatten[resul];
       ys[t_] = y[t] /. regla
```

Podemos probar que es solución de la ecuación diferencial sin más que comprobar que satisface la ecuación (1.3)

```
In[]:= D[ys[t],t]+2ys[t]-t
```

y comprobando que da idénticamente 0 (en algunos casos es necesario utilizar la instrucción *Simplify*).

1.2. Resolución gráfica de ecuaciones diferenciales

Dada una familia de curvas

$$G(x, y, C) = 0 \tag{1.4}$$

en general, es posible obtener la ED cuya solución es esta familia de curvas. Para obtenerla hay que derivar respecto de x y eliminar la constante C del sistema de 2 ecuaciones.

Por otro lado, dada la ED, $y' = f(x, y)$, si en cada punto de una región del plano, $P = (x, y)$, representamos un vector proporcional a la variación con la variable x, e.g. $\frac{dP}{dx} = (1, y') = (1, f(x, y))$, tendremos un campo vectorial que muestra la forma de las soluciones (por donde se moverán las soluciones).

Se puede buscar también aquellos puntos del plano que tienen la misma pendiente, $f(x, y) = m$, para distintos valores de la constante m (isoclinas).

Ejemplo 1.2.1 *La solución de la ecuación diferencial, $y' + 2y = t$, hemos visto que es: $y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + C\, e^{-2t}$. Esta familia de soluciones la podemos dibujar con la siguiente instrucción*

```
In[]:= z[t_,C_]= - 1/4 + t/2 + C E^(-2 t);
       p1 = Plot[Evaluate[Table[z[t, C], {C, -2, 2, 0.5}]],
       {t, -1, 2},PlotRange -> {-2, 2}]
```

obteniendo la figura 1.1. En la figura se puede observar el comportamiento asintótico de la solución

Por otro lado, podemos dibujar el campo de vectores asociado a la ecuación diferencial para comprobar que se corresponde con la solución obtenida. Para ello, primero debemos cargar el paquete **PlotField**.

```
In[]:= <<Graphics`PlotField`
       p2=PlotVectorField[{1,t-2y},{t,-1,2},{y,-2,2},Axis -> Automatic,
     ScaleFunction -> (1&),AxesOrigin -> {0,0}]
```

obteniendo el resultado de la figura 1.1 (derecha). Para comprobar mejor que se corresponden, podemos dibujarlas en una misma figura

```
In[]:= Show[p1,p2]
```

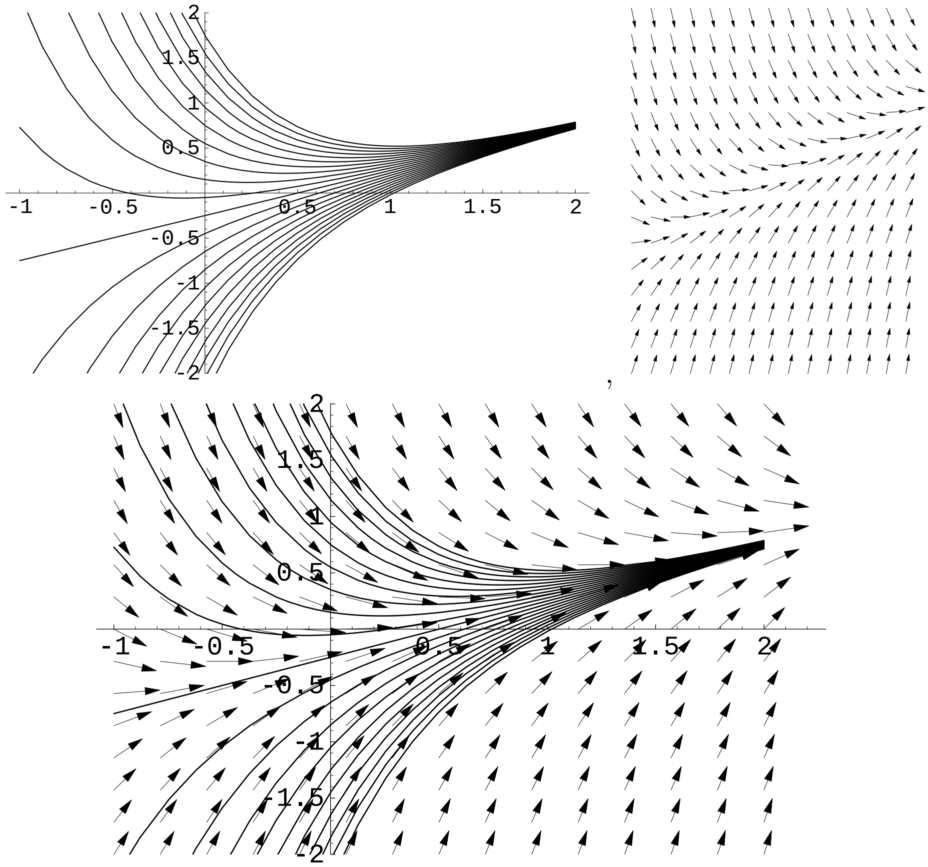

Figura 1.1: Izquierda superior: Familia de soluciones de la ecuación diferencial (1.2). Derecha superior: Campo de vectores de la misma ecuación diferencial. Inferior: combinación de ambas.

obteniendo el resultado de la figura 1.1.

Es posible que además de la solución general de la ecuación diferencial, $G(x,y,C) = 0$, se obtenga una solución singular (una solución particular que no se obtiene a partir de la solución general para ningún valor de la constante). La solución singular se puede obtener eliminando C del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} G(x,y,C) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C} G(x,y,C) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad g(x,y) = 0 \tag{1.5}$$

Ejemplo 1.2.2 *Considera la familia de curvas*

$$y = -x^2 + C\,x + C^2. \tag{1.6}$$

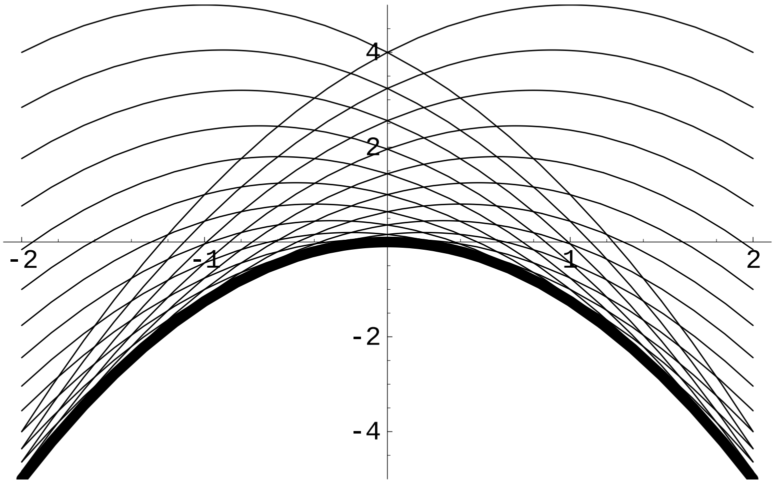

Figura 1.2: Familia de curvas, $y = -x^2 + C\,x + C^2$ junto a su envolvente.

Si derivamis respecto de x obtenemos que $C = y' - 2x$ y sustituyendo se obtiene la ecuación diferencial que tiene por solución la familia de soluciones. Sin embargo, la ecuación diferencial tiene otra solución que es la singular que podemos obtener resolviendo el sistema (1.5)

$$\left.\begin{array}{l} y + x^2 - C\,x - C^2 = 0 \\ -x - 2C = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{5}{4}x^2$$

La familia de curvas, junto a la envolvente (solución singular) se pueden representar como sigue:

```
In[]:= f1[t_,C_]=-t^2+C*t+C^2;
       f2[t_]=-(5/4)t^2;
       q1=Plot[Evaluate[Table[f1[t,C],{C,-2,2,0.2}]],{t,-2,2},
         PlotRange -> {-5,5}];
       q2=Plot[f2[t],{t,-2,2},PlotRange -> {-5,5},
         PlotStyle->{AbsoluteThickness[4]}];
       Show[q1,q2]
```

obteniendo el resultado de la Figura 1.2.

1.3. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Diremos que una ED es homogénea si cumple

$$y' = f(x, y), \qquad \text{con} \qquad f(tx, ty) = f(x, y). \tag{1.7}$$

El cambio de variable a realizar es

$$y(x) = x\, z(x) \tag{1.8}$$

y la ED para z es

$$z + xz' = f(1, z) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{f(1, z) - z} = \int \frac{dx}{x} + C. \tag{1.9}$$

1.3.1. Ecuaciones diferenciales reducibles

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \tag{1.10}$$

Reducibles a homogéneas

Si las rectas $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ se cortan en un punto, (α, β) el cambio es

$$x = X + \alpha, \qquad y = Y + \beta$$

y la ecuación en las nuevas variables es

$$y' = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right) \tag{1.11}$$

que es homogénea y tiene como solución

$$\int \frac{dz}{f(\frac{a_1 + b_1 z}{a_2 + b_2 z}) - z} = \int \frac{dX}{X} + C \tag{1.12}$$

que debemos completar desaciendo los cambios de variables.

Ejemplo 1.3.1 *Obtener la solución de la ecuación diferencial*

$$y' = \frac{2y - 4x - 5}{2y - 2x} \tag{1.13}$$

En primer lugar, definimos la función y calculamos el punto de corte

```
In[]:= f1[x_,y_]=(2y-4x-5)/(2y-2x);
In[]:= Solve[{2y-4x-5==0,2y-2x==0},{x,y}]
Out[]= {{x -> -5/2, y -> -5/2}}
```

Definimos la función homogénea

```
In[]:= f2[X_,Y_]=f1[X-5/2,Y-5/2]//Simplify
Out[]= (2X-Y)/(X-Y)
```

Podemos calcular las integrales y deshacer los cambios a la vez

```
In[]:= Integrate[1/(f2[1,z]-z),z]==Integrate[1/X,X]+Log[C]/.
       {X -> x+5/2, z -> (y+5/2)/(x+5/2)}//Simplify
Out[]= 2 Log[C] + 2 Log[5/2 + x] +
       Log[(25 + 20 x + 8 x^2 - 8 x y + 4 y^2)/(5 + 2 x))^2] == 0
```

Reducibles a variables separables

Si las rectas son paralelas ($\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$) el cambio es

$$z = a_2 x + b_2 y, \qquad (\text{o bien} \ \ z = a_1 x + b_1 y)$$

con $k = \frac{b_1}{b_2}$, y la ecuación pasa a ser separable

$$\frac{1}{b_2}(z' - a_2) = f\left(\frac{kz + c_1}{z + c_2}\right) \tag{1.14}$$

1.4. Ecuaciones diferenciales exactas

Dada la ED

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.15}$$

si $P_y = Q_x$ diremos que es exacta. Existe una función potencial, $U(x,y)$, tal que la familia de curvas equipotenciales, $U(x,y) = C$, son generadas por la ED

$$dU = U_x dx + U_y dy = P dx + Q dy = 0$$

donde

$$U = \int U_x dx + \varphi(y) = \int P dx + \varphi(y) \tag{1.16}$$

y derivando respecto a y

$$U_y = Q = \int P_y dx + \varphi'(y)$$

de donde se obtiene $\varphi(y)$. Si situamos el origen de potencial en el punto (x_0, y_0) es fácil ver que

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C \tag{1.17}$$

1.4.1. Factor integrante

Factor integrante es aquella función que al multiplicar la ec. (1.15) hace que se convierta en exacta

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{1.18}$$

Se tiene que cumplir que

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x.$$

Casos especiales

a) Si $\frac{P_y - Q_x}{Q} = g(x) \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{\int g(x)dx}$.

b) Si $\frac{P_y - Q_x}{P} = g(y) \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{-\int g(y)dy}$.

1.5. Ecuación diferencial lineal

La ED lineal de primer orden

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1.19}$$

tiene como solución general

$$y = e^{\int P dx}\left(C + \int e^{-\int P dx} Q dx\right). \tag{1.20}$$

1.5.1. Ecuaciones de Bernouilli y de Riccati

Ecuación de Bernouilli

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \qquad n \neq 0,\ n \neq 1. \tag{1.21}$$

Haciendo el siguiente cambio se convierte en lineal

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x). \tag{1.22}$$

Ecuación de Riccati.

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{1.23}$$

Si conocemos una solución particular de la ED, $y_p(x)$, haremos el cambio

$$y = y_p + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z' + (Q + 2Ry_p))z = -R \tag{1.24}$$

que es una ED lineal.

1.6. Trayectorias Isogonales

La solución de la ED

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1.25}$$

es una familia de curvas, $F(x, y, C) = 0$. Por cada punto (x, y) sólo pasa una curva y su pendiente en ese punto es justamente y'. Si tenemos en cuenta que la tangente forma un ángulo θ, entonces $y' = \tan(\theta)$ y queremos buscar las curvas que al cortarlas forman un ángulo ω, entonces el ángulo de las nuevas curvas será $\phi = \theta + \omega$.

Teniendo en cuenta que

$$\theta = \phi - \omega \quad \Rightarrow \quad y' = \tan(\theta) = \frac{\tan(\phi) - \tan(\omega)}{1 + \tan(\phi)\tan(\omega)}$$

si sustituimos en (1.25) denotando $z = y,\ z' = \tan(\phi)$

$$f\left(x, z, \frac{z' - \tan(\omega)}{1 + z'\tan(\omega)}\right) = 0 \tag{1.26}$$

y la solución general, dada por la familia de curvas, $G(x, z, C) = 0$, cortarán a las curvas, $F(x, y, C) = 0$, formando un ángulo ω.

Si buscamos **trayectorias ortogonales**, $\omega = \frac{\pi}{2}$, debemos tener en cuenta que

$$\lim_{\omega \to \pi/2} \frac{z' - \tan(\omega)}{1 + z'\tan(\omega)}) = \lim_{\omega \to \pi/2} \frac{-\frac{1}{\cos^2(\omega)}}{z'\frac{1}{\cos^2(\omega)}}) = \frac{-1}{z'}$$

Ejemplo 1.6.1 *Calcular las trayectorias ortogonales a: $y = C\,x^2 + C$*

Derivando y eliminando la constante C se tiene que la ecuación diferencial correspondiente es:

$$y' = \frac{2xy}{x^2+1}$$

como se puede comprobar por separación de variables. La ecuación cuyo campo de vectores serán ortogonales a éste es:

$$-\frac{1}{z'} = \frac{2xz}{x^2+1}$$

que también se puede resolver por separación de variables, dándonos

$$z = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(C - x^2 - \ln x^2)}$$

Podemos representar ambas familias de curvas para comprobar que se cortan formando ángulos rectos

```
In[]:= g1[t_,C_]=Ct^2+C);
       g2a[t_,C_]=-Sqrt[(C-t^2-Log[t^2])/2];
       g2b[t_,C_]=Sqrt[(C-t^2-Log[t^2])/2];
       v1=Plot[Evaluate[Table[g1[t,C],{C,-2,2,0.2}]],{t,-2,2},
         PlotRange -> {-2,2},AspectRatio -> Automatic];
       v2=Plot[Evaluate[Table[{g2a[t,C],g2b[t,C]},{C,1/10,10,1}]],
         {t,-2,2}, PlotRange -> {-2,2},AspectRatio -> Automatic];
       Show[v1,v2]
```

obteniendo el resultado mostrado en la figura 1.3.

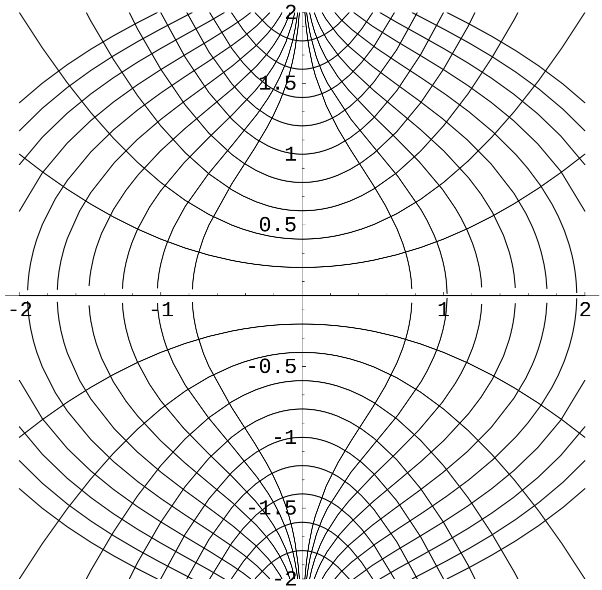

Figura 1.3: Familia de curvas, $y = C\,x^2 + C$, junto a sus ortogonales.

1.7. Ejercicios del Capítulo 1

1. Dibuja el campo de vectores de la ecuación

$$2y + x\,y' = e^x$$

Dibuja en la misma gráfica las familias de curvas

(a) $y = \frac{1}{x^2}(C + x\,e^s - e^x)$.

(b) $y = \frac{2}{x^2}(C + x\,e^s - e^x)$.

Indica cual es la que es solución de la ecuación diferencial.

2. Resuelve, paso a paso y sin el *DSolve* la ecuación homogénea

$$y' = \frac{y + x\,\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x}, \qquad y(1) = \frac{\pi}{4}$$

Dibuja el campo de vectores para una región con $x > 0$.

3. Dibuja la familia de curvas, $y = C\,x + \frac{1}{C^2}$ junto a la curva, $y = \frac{3}{4^{1/3}}x^{2/3}$ y comprueba, sustituyendo, que ambas son solución de la ecuación diferencial

$$y = x\,y' + \frac{1}{(y')^2}$$