Práctica 2

Ecuaciones diferenciales de orden superior

2.1. Introducción

Una ED de orden n es una ecuación de la forma

$$g(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

o escrito en forma normal

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{2.2}$$

La solución general dependerá de n constantes independientes

$$F(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0. \tag{2.3}$$

Para obtener la ED a partir de la familia de curvas (2.3) hay que derivar n veces respecto de x y eliminar las constantes $C_1, \dots, C_n$ del sistema de $n + 1$ ecuaciones.

Para resolver una ecuación diferencial de orden superior utilizaremos el comando *DSolve* de manera similar a las ecuaciones de primer orden.

Ejemplo 2.1.1 *La ecuación diferencial*

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \tag{2.4}$$

cuya solución es: $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$*, donde* C_1, C_2 *son las constantes arbitrarias, se obtiene con el Mathematica con la instrucción*

```
In[]:= DSolve[y''[t]+3y'[t]+2y[t]==0,y[t],t]
```

obteniendo, como solución

$$Out[] := \{\{y[t] \to e^{-2t}\ C[1] + e^{-t}\ C[2]\}\}$$

siendo $C[1]$ y $C[2]$ las constantes arbitrarias.

Si el problema es de condiciones iniciales, por ejemplo

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{2.5}$$

cuya solución es: $y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$, ésta se puede obtener con

```
In[]:= DSolve[{y''[t]+3y'[t]+2y[t]==0,y[0]==1,y'[0]==0},y[t],t]
```

dando

$$Out[] := \{\{y[t] \to e^{-2t}(-1 + 2e^{t})\}\}$$

Se puede comprobar que esta solución es equivalente a la anterior.

2.2. Ecuaciones lineales de orden n

Son aquellas ED que se pueden escribir de la siguiente forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{2.6}$$

Diremos que la ED es **homogénea** si $f = 0$.

Operador derivada $D \equiv \frac{d}{dx}$. Actúa sobre una función para dar otra función: $D^k y = y^{(k)},\ D^0 y = y$. Este operador permite escribir las ecuaciones de forma más compacta

$$A(D)y \equiv (a_n(x)D^n + \cdots + a_1(x)D + a_0(x))\, y = f(x). \tag{2.7}$$

2.3. Ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes

El operador $A(D)$ es lineal, esto es, dadas las constantes α, β y las funciones $f(x), g(x)$ se tiene que

$$A(D)(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A(D)f(x) + \beta A(D)g(x).$$

Por tanto, si $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones particulares de la ED ($A(D)y_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$) entonces $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ es también solución de la ED. Para que y sea solución general de la ED (con las n constantes) las soluciones particulares $y_1, \ldots, y_n$ tienen que ser independientes. Para ello utilizaremos el **wronskiano**

$$W(y_1, \ldots, y_n; x) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

y recordamos el siguiente resultado

Teorema 2.3.1 *Dada la ED $A(D)y = 0$ con $a_i(x),\ i = 0, \ldots, n$ continuas y $a_n \neq 0$ en $x \in (a, b)$, entonces las soluciones particulares, $y_1, \ldots, y_n$, definidas en $x \in (a, b)$ son linealmente independientes (LI) si y sólo si $W(y_1, \ldots, y_n; x) \neq 0,\ x \in (a, b)$.*

Ejemplo 2.3.1 *Dada la ecuación diferencial*

$$y'' + 4y = 0,$$

comprobar que la función

$$y = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)$$

es su solución general.

En primer lugar comprobamos que las dos funciones, $y_1 = \sin(2x),\ y_2 = \cos(2x)$, son solución de la ecuación diferencial. Para ello hacemos

```
In[]:= funcs={Sin[2x],Cos[2x]};
       ecdif[y_]:=D[y,{x,2}]+4y
       ecdif[funcs]
Out[]:= {0,0}
```

Final,mente, comprobamos que el wronskiano es distinto de 0

```
In[]:= fila1=funcs;
       fila2=D[funcs,x]
       Expand[Det[{fila1,fila2}],Trig->True]
Out[]:= -2
```

Como el wronskiano es distinto de 0, se trata de la solución general de la ecuación diferencial.

Si tenemos coeficientes constantes entonces $A(D)$ toma la expresion de un polinomio en D, y por ello se suele denotar por $P(D)$. Si camiamos el operador D por una variable, r, obtendremos un polinomio de grado n en la variable r, el cual recibe el nombre de polinomio característico.

Si r_i es solución de la ecuación polinómica, $P(r) = 0$, entonces $y_i = e^{r_i x}$ será una solución particular de la ED, $P(D)y_i = 0$ (se escribe indistintamente $P(D)$ y $A(D)$).

El polinomio $P(r)$ juega un papel muy importante y se le llama **polinomio característico**, y a la ecuación $P(r) = 0$, ecuación característica.

Recordamos los siguientes resultados:

Teorema 2.3.2 *Si $P(r) = 0$ admite n raíces distintas, $r_1, \ldots, r_n$ (reales o imaginarias) entonces $\{e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_n x}\}$ es un sistema fundamental de soluciones (n soluciones LI).*

Teorema 2.3.3 *Si la ecuación $P(r) = 0$ tiene una solución con multiplicidad m (por ejemplo $r_1 = \ldots = r_m = R$) entonces las correspondientes m soluciones LI a tomar serán $\{e^{Rx}, xe^{Rx}, \ldots, x^{m-1}e^{Rx}\}$.*

NOTA. Si $r = \alpha + \beta i$ es una raíz compleja, entonces su conjugado, $r^* = \alpha - \beta i$, también es raíz de la ecuación. Las funciones complejas $\{e^{(\alpha+\beta i)x}, e^{(\alpha-\beta i)x}\}$ estarán multiplicadas por constantes complejas de manera que el resultado final sean funciones reales. Las funciones reales equivalentes que se utilizan en la práctica son $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$. Si la raíz compleja tiene multiplicidad m, entonces las $2m$ funciones a utilizar serán

$$\{e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\}$$

Ejemplo 2.3.2 *Obtened la solución de la ecuación diferencial sin utilizar DSolve*

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Las raíces del polinomio característico

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

las podemos obtener con el comando Solve

```
In[]:= Solve[r^2+2r+5==0,r]
Out[]:= {{r->-1-2 I},{r->-1+2 I}}
```

y la solución será

$$y = C_1 e^{-x}\cos(2x) + C_2 e^{-x}\sin(2x)$$

como se puede comprobar con el comando DSolve.

Si el problema tiene condiciones iniciales, por ejemplo, $y(0) = 1,\ y'(0) = 5$*, las constantes* C_1, C_2 *se pueden obtener utilizando el comando Solve*

```
In[]:= ys[x_,C1_,C2_]= C1 E^(-x) Cos[2x] + C2 E^(-x) Sin[2x]
       dys[x_,C1_,C2_]= D[ys[x,C1,C2],x]
       Solve[{ys[0,C1,C2]==1,dys[0,C1,C2]==5},{C1,C2}]
Out[]:= {{C1 -> 1, C2 -> 3}}
```

y la solución buscada es

$$y = e^{-x}\cos(2x) + 3e^{-x}\sin(2x)$$

como podemos comprobar también con el DSolve.

Ejemplo 2.3.3 *Obtened la solución de la ecuación diferencial sin utilizar DSolve*

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Las raíces del polinomio característico, $r^2 + 2r + 1 = 0$*, son* $r = -1$ *doble, y que podemos obtener don el comando Solve*

```
In[]:= Solve[r^2+2r+1==0,r]
Out[]:= {{r -> -1}, {r -> -1}}
```

Vemos que tiene una raíz doble y la solución será

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x\ e^{-x}$$

Si el problema tiene condiciones iniciales se resuelve de manera similar al ejemplo anterior. Podemos comprobar con el wronskiano que las funciones e^{-x} *y* $x\ e^{-x}$ *son independientes.*

2.4. Ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$A(D)y = f(x) \tag{2.9}$$

Si y_H es solución de la ED homogénea ($A(D)y_H = 0$) y y_p es una solución particular de la no homogénea ($A(D)y_p = f(x)$) entonces $y = y_H + y_p$ es la solución general de (2.9) (es solución de la ED y tiene n constantes independientes).

2.4.1. Método de los coeficientes indeterminados

Si $f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = e^{\alpha x}\,(P_c(x)\cos\beta x + P_s(x)\sin\beta x) \tag{2.10}$$

con P_c, P_s polinomios de grados c, s, respectivamente, entonces probaremos con una solución particular de la forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\,(P_{m,1}(x)\cos\beta x + P_{m,2}(x)\sin\beta x) \tag{2.11}$$

con $P_{m,1}, P_{m,2}$ dos polinomios de grado $m = \max\{c, s\}$ y cuyos coeficientes debemos determinar sustituyendo y_p en la ED (2.9) e igualando ambas partes de la ecuación. Como casos particulares tenemos los casos en que $\alpha = 0$, o bien $\beta = 0$ o $\alpha = \beta = 0$.

Si $r = \alpha + \beta i$ es además solución de la ecuación característica con multiplicidad k, para obtener una solución particular distinta de la homogénea deberemos tomar

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\,(P_{m,1}(x)\cos\beta x + P_{m,2}(x)\sin\beta x)\,x^k \tag{2.12}$$

Ejemplo 2.4.1 *Halla (sin utilizar DSolve) las constantes A, B, C para que $y_p = A\,x + B\,x^2 + C\,x^3$ sea una solución particular de*

$$y''' + 2y'' + y' = 2x^2.$$

Las raíces del polinomio característico son: $r = -1$ doble y $r = 0$ simple. Como x^2 es un polinomio de segundo orden y $r = 0$ es una raíz simple, la solución particular a probar en justamente y_p. El primer paso es obtener el sistema de ecuaciones que deben satisfacer las constantes y para ello sustituimos y_p en la ecuación diferencial

```
In[]:= yp[x_]=A*x+B*x^2+C*x^3;
       pol=D[yp[x],{x,3}]+2D[yp[x],{x,2}]+D[yp[x],x];
       Expand[pol,x]
Out[]:= A + 4 B + 6 C + 2 B x + 12 C x + 3 C x^2
```

por lo que el sistema a resolver es

$$\left\{\begin{array}{rcl} A+4B+6C & = & 0 \\ 2B+12C & = & 0 \\ 3C & = & 2 \end{array}\right.$$

y que podemos resolver con el Solve

```
In[]:= Solve[{A + 4 B + 6 C==0, 2 B + 12 C == 0
        3 C == 2},{A,B,C}]
Out[]:= {{A -> 12, B -> -4, C -> 2/3}}
```

Este resultado lo podemos comprobar resolviendo la ED y tomando 0 para las tres constantes

```
In[]:=DSolve[y'''[x]+2y''[x]+y'[x]==2x^2,y[x],x]/.
     {C[1]->0,C[2]->0,C[3]->0}
```

2.4.2. Método de Lagrange o Variación de constantes

Si $f(x)$ no es de la forma (2.10), procederemos de la siguiente forma. Sea $y_H = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$ la solución de la ED homogénea, con $C_1, \ldots, C_n$ constantes. Entonces, tomaremos como solución particular una función similar a la solución homogénea, pero cambiando las constantes por funciones dependientes del tiempo, que debemos determinar

$$y_p = C_1(x) y_1 + \cdots + C_n(x) y_n.$$

Las funciones $C_i(x)$ las obtenemos de resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ccccccc} C_1' y_1 & + & \cdots & + & C_n' y_n & = & 0 \\ C_1' y_1' & + & \cdots & + & C_n' y_n' & = & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ C_1' y_1^{(n-2)} & + & \cdots & + & C_n' y_n^{(n-2)} & = & 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} & + & \cdots & + & C_n' y_n^{(n-1)} & = & \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{array}\right\} \qquad (2.13)$$

Resolviendo el sistema se obtienen las ecuaciones $C_i'(x) = \phi_i(x)$, e integrando se tiene $C_i(x) = C_i + \int \phi_i(x)dx$. Por tanto, la solución general de la ED será

$$y = y_H + y_p = \sum_{i=1}^{n} \left(C_i + \int \phi_i(x)dx \right) y_i$$

con C_i constantes arbitrarias.

Ejemplo 2.4.2 *Resolver por variación de constantes (sin utilizar DSolve)*

$$y'' - 3y' + 2y = \sin(e^{-x}).$$

Las raíces del polinomio característico son: $r = 1$ *y* $r = 2$, *por lo que las soluciones de la homogénea a considerar serán:* $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x}$. *Con esto, el sistema a resolver es*

$$\left.\begin{array}{rcrcl} C_1'y_1 & + & C_2'y_2 & = & 0 \\ C_1'y_1' & + & C_2'y_2' & = & \sin(e^{-x}) \end{array}\right\} \tag{2.14}$$

que podemos resolver con el Solve

```
In[]:= y1[x_]=E^x;
       y2[x_]=E^(2x);
       Solve[{K1 y1[x] + K2 y2[x] ==0,
       K1 D[y1[x],x] + K2 D[y2[x],x] ==Sin[E^(-x)]},{K1,K2}]
Out[]:= {{K1->-E^(-x) Sin[E^(-x)],K2->E^(-2 x) Sin[E^(-x)]}}
```

donde $K1, K2$ *se corresponden con* C_1', C_2', *por lo que debemos integrar*

```
In[]:= C1x=Integrate[-E^(-x) Sin[E^(-x)],x]
       C2x=Integrate[E^(-2 x) Sin[E^(-x)],x]
Out[]:= -Cos[E^(-x)]
Out[]:= E^(-x) Cos[E^-x] - Sin[E^(-x)]
```

y la solución viene dada por

```
In[]:= ysol[x_]=(C1x+C1)*E^x+(C2x + C2)E^(2 x)//Simplify
Out[]:= E^x (C1 + C2 E^x - E^x Sin[E^(-x)])
```

como se puede comprobar resolviendo la ED con el DSolve.

2.5. Osciladiones forzadas y resonancias

Muchos problemas de ingeniería se pueden modelizar por una ED lineal de segundo orden no homogénea de la forma

$$y'' + \alpha y' + \beta y = f(t)$$

donde α suele ser un coeficiente de rozamiento (y por tanto $\alpha > 0$) β es un coeficiente de restitución, que también suele ser positivo, y $f(t)$ es una fuerza externa. Esta ecuación describe, por ejemplo, el movimiento de la carga eléctrica en un circuito RLC, o las oscilaciones de un muelle que tiene rozamiento y existe una fuerza externa.

Para $f(t) = 0$, el sistema tiene una frecuencia propia de oscilación (oscilaciones amortiguadas). Cuando la fuerza externa, $f(t)$, es periódica y el rozamiento es pequeño el sistema puede entrar en resonancia para ciertas frecuencias de la fuerza externa, y oscilaciones pequeñas producidas por una fuerza externa pequeña pueden amplificarse y producir efectos deseados o no deseados (columpiarse con pequeñas fuerzas periódicas, o romper un puente al desfilar un grupo de gente con movimiento periódico).

Ejemplo 2.5.1 *Considerar la ED inicialmente en reposo*

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \cos(\omega t) \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

para el caso particular $\alpha = \frac{1}{10}$ *y* $\beta = 4$*. Suponed que se trata de un instrumento inicialmente en reposo y que si las amplitudes superan el valor* $y = 2$ *éste se rompe. Vamos a visualizar si realmente se puede romper para algunos valores de la frecuencia* ω*. Con el Mathematica podemos obtener la solución en función del tiempo y de la frecuencia de la fuerza externa. Por ejemplo, con la instrucción*

```
In[]:= resul=DSolve[{y''[t]+1/10y'[t]+4y[t]==Cos[w t],
          y[0]==0,y'[0]==0},y[t],t];
       regla=Flatten[resul];
       ys[t_,w_]=y[t]/.regla;
```

El Mathematica dispone de un comando que nos permite visualizar la amplitud en función del tiempo y para todo un rango de frecuencias ω

```
In[]:= Manipulate[Show[ListPlot[Table[{w,ys[t,w]},{w,1,3,0.02}],
PlotStyle->PointSize[0.02],PlotRange->{-2,2}]],{{t,0,"t"},0,20}]
```

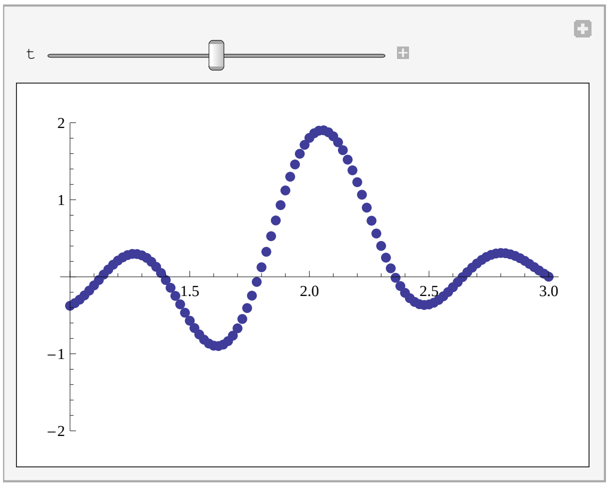

Figura 2.1:

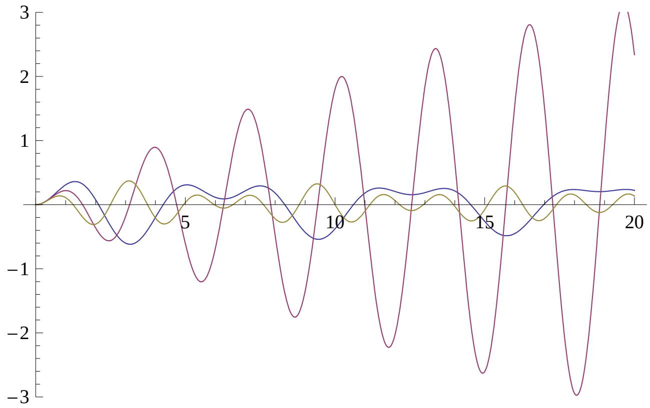

Figura 2.2:

nos permite observar la amplitud de las oscilaciones para el rango $\omega \in [1, 3]$ *y el intervalo tenporal* $t \in [0, 20]$ *(ver figura 2.1). Al movernos con el tiempo, vemos que la amplitud de las oscilaciones para valores alrededor de* $\omega = 2$ *se amplifican y pueden superar el valor máximo permitido.*

Si dibujamos la función $ys(t, \omega)$ *para los valores* $\omega = 1, 2, 3$ *tenemos*

```
In[]:=Plot[{ys[t,1],ys[t,2],ys[t,3]},{t,0,20},PlotRange->{-3,3}]
```

obteniendo la figura 2.2. Mientras que para $\omega = 1, 3$ *las amplitudes se mantienen siempre pequeñas, para* $\omega = 2$ *ésta aumenta considerablemente con el tiempo.*