Práctica 5

Ecuaciones en derivadas parciales

En esta práctica veremos cómo es posible utilizar el programa Mathematica para resolver algunos tipos de ecuaciones en derivadas parciales.

Revisaremos también algunas cuestiones relacionadas con la solución mediante funciones analíticas de problemas de contorno y su implementación en el Mathematica, tanto para obtener soluciones aproximadas de estos problemas como para visualizarlos.

5.1. Soluciones de EDP's de coeficientes constantes reducibles.

Recordemos que una EDP lineal se dice que es *reducible* si el operador del primer miembro puede descomponerse en factores lineales, es decir en factores donde sólo aparezcan derivadas de primer orden.

Una EDP lineal de coeficientes constantes $\Phi(D_x, D_y)z = f(x, y)$, es reducible si se puede escribir de la forma

$$\varphi_1(D_x, D_y)\varphi_2(D_x, D_y)\cdots\varphi_n(D_x, D_y)z = f(x, y),$$

siendo

$$\varphi_i(D_x, D_y) = a_iD_x + b_iD_y + c_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.1}$$

Si $f(x, y) = 0$, la ecuación se llamará homogénea y en caso contrario no homogénea. Para resolver este tipo de ecuación hemos de tener en cuenta que la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea se puede obtener como la suma de la solución general de la ecuación homogénea más una solución particular de la ecuaciónn no homogénea.

Consideremos una ecuación homogénea y reducible,

$$\varphi_1(D_x, D_y)\varphi_2(D_x, D_y)\cdots\varphi_n(D_x, D_y)z = 0. \tag{5.2}$$

Si z_i son solución de la ecuación

$$(a_i D_x + b_i D_y + c_i)\, z_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{5.3}$$

la solución general de (5.2) será de la forma

$$z = \sum_{i=1}^{n} z_i \ .$$

Como sabemos, dada la ecuación

$$(aD_x + bD_y + c)\, z = f(x, y), \tag{5.4}$$

su ecuación característica viene dada por

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{f(x,y) - c\, z} \ . \tag{5.5}$$

Por tanto, para resolver la ecuación (5.3) consideraremos el sistema diferencial característico

$$\frac{dx}{a_i} = \frac{dy}{b_i} = -\frac{dz}{c_i z} \ . \tag{5.6}$$

La resolución del sistema es la siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{a_i} = \dfrac{dy}{b_i} \\[2ex] \dfrac{dx}{a_i} = -\dfrac{dz}{c_i z} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_i y - b_i x = C_1 \\[2ex] z e^{\frac{c_i x}{a_i}} = C_2 \end{array} \right. \tag{5.7}$$

y la solución general viene dada por

$$z_i = e^{-\frac{c_i x}{a_i}} \psi_i \left(a_i y - b_i x \right), \tag{5.8}$$

con ψ_i, $i = 1, 2, \ldots n$ funciones arbitrarias. La solución general de la ecuación homogénea (5.2) es de la forma

$$z = \sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{c_i x}{a_i}} \psi_i \left(a_i y - b_i x \right). \tag{5.9}$$

Hemos de tener en cuenta que si $aD_x + bD_y + c$ es un factor de multiplicidad k, entonces la correspondiente solución es

$$\sum_{i=0}^{k-1} x^i \phi_i \left(ay - bx\right) e^{-\frac{cx}{a}},$$

con ϕ_i, $i = 1, 2, \ldots n$ funciones arbitrarias.

La solución general de la ecuación completa se obtiene como la suma de la solución de la homogénea más una solución particular de la ecuación ho homogénea. Para obtener una solución particular buscaremos un conjunto de funciones de forma "anidada". Es decir,

$$\begin{aligned} \varphi_1(D_x, D_y)u_1 &= f(x, y) \\ \varphi_2(D_x, D_y)u_2 &= u_1. \end{aligned}$$

Para resolver el sistema se procede de la siguiente forma: en primer lugar resolvemos la ecuación, $\varphi_1 u_1 = f(x, y)$, obteniendo $u_1(x, y)$ como sulución, y que es utilizada en la ecuación $\varphi_2 u_2 = u_1$, para obtener $u_2(x, y)$.

Ejemplo 5.1.1 *Resolver la EDP*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 4xe^{-2y} \ . \tag{5.10}$$

Solución:

Utilizando operadores derivada, la ecuación diferencial anterior se escribe

$$\left(D_x^2 - 2D_xD_y + D_y^2 - 2D_x + 2D_y\right) z = 4xe^{-2y} \ . \tag{5.11}$$

Consideremos la ecuación homogénea

$$\left(D_x^2 - 2D_xD_y + D_y^2 - 2D_x + 2D_y\right) z = 0 \ .$$

Utilizando la función `Factor[]` *tenemos*

```
In[]:= Factor[Dx^2 - 2Dx*Dy + Dy^2 - 2Dx + 2Dy]
Out[]=(-2 + Dx - Dy) (Dx - Dy)
```

La solución de la ecuación

$$\left(D_x - D_y - 2\right) z_1 = 0 \ ,$$

es de la forma

$$z_1 = e^{-2x}\psi_1(x + y) \ .$$

La solución de la ecuación

$$(D_x - D_y)\, z_2 = 0 \ ,$$

es de la forma

$$z_2 = \psi_2(x+y) \ .$$

Así la solución general de la ecuación homogénea es

$$z_h = e^{-2x}\psi_1(x+y) + \psi_2(x+y) \ .$$

Para obtener una solución particular tenemos que resolver el sistema

$$(D_x - D_y)\, u \;=\; 4e^{-2y}x \qquad (5.12)$$

$$(D_x - D_y - 2)\, z \;=\; u \ . \qquad (5.13)$$

Para resolver (5.12) consideraremos el sistema característico

$$dx = -dy = \frac{du}{4xe^{-2y}} \ ,$$

o sea, el sistema

$$\frac{dy}{dx} = -1 \ , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4xe^{-2y}}\,\frac{du}{dx} \ .$$

Utilizando el Mathematica

```
In[]:=DSolve[{y'[x] == -1,
    y'[x]==-u'[x]/(4*x*Exp[-2*y[x]])},
    {y[x], u[x]}, x]
Out[]={{y[x] -> -x + C[1], u[x] -> E^(2 x - 2 C[1])
       (-1 + 2 x) + C[2]}}
```

Una solución particular para u es

$$u = 2xe^{-2y} - e^{-2y} \ .$$

Seguidamente, debemos resolver la ecuación (5.13), que toma la forma

$$(D_x - D_y - 2)\, z = 2xe^{-2y} - e^{-2y} \ ,$$

cuyo sistema característico es

$$dx = -dy = \frac{dz}{2xe^{-2y} - e^{-2y} + 2z} \ ,$$

o sea,

$$\frac{dy}{dx} = -1 \ , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2xe^{-2y} - e^{-2y} + 2z}\,\frac{dz}{dx} \ .$$

Utilizando el Mathematica, el sistema de ecuaciones diferenciales lo podemos resolver de la siguiente manera:

```
In[]:= DSolve[{y'[x] == -1,y'[x]==
    -z'[x]/(2*x*Exp[-2*y[x]]- Exp[-2*y[x]] + 2*z[x])},
    {y[x], z[x]}, x]

Out[]={{y[x] ->-x + C[1], z[x] ->E^(2x - 2C[1])
       (-x+ x^2)+E^(2x)C[2]}}
```

Luego una solución particular viene dada por

$$z_p = e^{-2y}\left(-x + x^2\right) \ .$$

La solución general de la ecuación completa es

$$z = e^{-2x}\psi_1(x+y) + \psi_2(x+y) + e^{-2y}\left(-x + x^2\right) \ .$$

Para obtener soluciones particulares de ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales se puede utilizar también un método similar al método de los coeficientes indeterminados de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Supongamos que se quiere resolver una ecuación diferencial no homogénea de la forma

$$\Phi\left(D_x, D_y\right) z = f(x,y) \ .$$

entonces probaremos con una función prueba, $z_p(x,y)$ similar a $f(x,y)$ pero con coeficientes a determinar. Si esta función fuera solución de la homogénea, se multiplicará por x o por y.

Por ejemplo, si $f(x,y)$ es un polinomio, se prueba como solución un polinomio del mismo grado.

Ejemplo 5.1.2 *Obtener una solución particular de la ecuación*

$$\left(D_xD_y - 2D_x + 1\right) z = 2 + x^2 + y^2 \ .$$

Se prueba como solución particular una función de la forma

$$z_p = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g \ .$$

```
In[]:= zp = a*x^2+b*x*y+c*y^2+d*x+e*y+g
In[]:=Expand[D[zp,x,y]-2*D[zp,x]+zp]
Out[]=b-2d+g-4ax+dx+ax^2-2by+ey+bxy+cy^2
```

con lo que se tienen las ecuaciones

$$a = 1 \ , \quad d - 4a = 0 \ , \quad b = 0 \ , \quad e - 2b = 0 \ , \quad b - 2d + g = 2 \ , \quad c = 1 \ .$$

Resolviendo el sistema

```
In[]:=Solve[{b-2d+g==2,-4a+d==0,a==1,-2b+e==0,
            b==0,c==1},{a,b,c,d,e,g}]
Out[]={{a -> 1, b -> 0, c -> 1, d -> 4, e -> 0, g -> 10}}
```

con lo que la solución particular es

$$z_p = x^2 + y^2 + 4x + 10 \ .$$

5.2. EDPs de evolución: Separacón de Variables

Los problemas de evolución que consideraremos en esta práctica serán las ecuaciones de ondas (hiperbólicas) y de difusión (parabólicas) en una variable espacial y sobre una región espacial finita. Las ecuaciones diferenciales que consideraremos son

$$\text{(hiperbólica)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \qquad t > 0, \qquad 0 \leq x \leq l. \tag{5.14}$$

$$\text{(parabólica)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \qquad t > 0, \qquad 0 \leq x \leq l. \tag{5.15}$$

Teniendo en cuenta que la ecuación es lineal y utilizando separación de variables, podemos escribir la solución de los problemas en la siguiente forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

La forma de obtener las funciones $T_n(t)$ y $X_n(x)$ es sustituir en la ecuación diferencial. En las ecuaciones (5.14) y (5.15), la función $X_n(x)$ debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$

cuya solución general vimos en Ampliación de Matemáticas que era, para $\lambda_n > 0$

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\ x\right) + B_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ x\right).$$

Las ecuaciones diferenciales vienen acompañadas de condiciones iniciales y de frontera, las cuales determinan las constantes A_n, B_n y λ_n.

Las condiciones de frontera pueden ser sencillas o bastante complejas. Nosotros tomaremos para las condiciones de frontera la más sencilla, condiciones de frontera nulas. De la condición de la izquierda

$$u(0,t) = 0.$$

Esto es independiente de t y por tanto nos fuerza a que $X(0) = 0$, e inmediatamente deducimos que $A_n = 0$. Las condiciones de frontera en el extremo derecho nos dará los valores de λ_n válidos para el problema en cuestión (las constantes B_n se absorben dentro de las funciones $T_n(t)$ y se determinarán a partir de las condiciones iniciales). Consideraremos

$$u(l,t) = 0$$

donde tenemos

$$\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ l\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.$$

Descomposición de funciones

Como sabemos, una función, $f(x)$, se puede aproximar en un intervalo $x \in [0,l]$ por una serie en senos que se anulen en $x = 0$ y en $x = l$. Si, además se tiene que $f(0) = f(l) = 0$ la convergencia será uniforme. Por tanto, la función se puede descomponer

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi\ x}{l}\right). \tag{5.16}$$

Los coeficientes, C_n se pueden obtener teniendo en cuenta las condiciones de ortogonalidad

$$\int_0^l \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\ x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\ x}{l}\right)\, dx = \delta_{n,m} \int_0^l \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi\ x}{l}\right) dx\ . \tag{5.17}$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^l \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi\ x}{l}\right) dx = \frac{l}{2}\ .$$

Con esto se pueden calcular los coeficientes C_n

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\, x}{l}\right)\, dx \ . \qquad (5.18)$$

Para comprobar las reglas de ortogonalidad, podemos definir la función

```
ort[n_,m_]:=NIntegrate[Sin[n*Pi*x/L]*Sin[m*Pi*x/L],{x,0,L}]
```

5.2.1. Simulaciones de problemas de evolución

A continuación vamos a hacer uso de herramientas de *Mathematica* para realizar simulaciones de soluciones de EDPs de evolución.

La funciones

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(n\pi t\right) + B_n \sin\left(n\pi t\right)\right) \mathrm{sen}\left(n\pi x\right) \ , \qquad (5.19)$$

y

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-n\pi t\right) \mathrm{sen}\left(n\pi x\right) \ , \qquad (5.20)$$

son soluciones de las EDPs (5.14) y (5.15), respectivamente, para $a = l = 1$ con condiciones de frontera nulas, esto es $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Los coeficientes A_n se obtienen de las condiciones iniciales, $u(x,0)$, y teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas

$$A_n \ = \ 2\int_0^1 \mathrm{sen}\left(n\pi x\right) u(x,0)\, dx \ .$$

Para calcular los coeficientes A_n, usamos el Mathematica

```
In[]:= a[n_]=2*Integrate[Sin[n*Pi*x]*u0[x],{x,0,1}]
```

Una vez tenemos los coeficientes, definimos la función

```
In[]:=u[x_,t_,nau_]:=Sum[a[n]*Cos[n*Pi*t]*Sin[n*Pi*x],{n,1,nau}]
```

Utilizando el *Mathematica* podemos visualizar de manera dinámica la evolución con el tiempo con la instrucción. Por ejemplo, para visualizar los resultados con 2 armónicos (círculos) y con 5 armónicos (línea contínua)

```
In[]:=Manipulate[ Show[ ListPlot[Table[{x, u[x, t, 2]},
      {x, 0, 1, 0.1}], PlotStyle -> PointSize[0.03]],
      ListPlot[Table[{x, u[x, t, 5]}, {x, 0, 1, 0.1}],
      Joined -> True, PlotRange -> All]], {{t, 1, "t"}, 0, 10}]
```

5.3. Ecuación de ondas 1D: Vibraciones forzadas de una cuerda finita con extremos móviles

Resumen: algoritmo de cálculo: Dado el problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\ , \qquad 0 < x < l, \\
u(0,t) &= \psi_1(t)\ , \qquad u(l,t) = \psi_2(t) \\
u(x,0) &= \varphi_0(x)\ , \qquad u(x,0) = \varphi_1(x)\ ,
\end{aligned}$$

introducimos las constantes, a, l y definimos las funciones: $f(x,t), \psi_1(t), \psi_2(t), \varphi_0(x), \varphi_1(x)$. A continuación, procedemos con el siguiente orden de cálculos

$$\begin{aligned}
u_3(x,t) &= \psi_1(t) + \frac{x}{l}(\psi_2(t) - \psi_1(t)) \\
g(x,t) &= f(x,t) - \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\
u_1(x,0) &= u(x,0) - u_3(x,0) \\
u_1'(x,0) &= u'(x,0) - u_3'(x,0) \\
A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l u_1(x,0)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\
B_n &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^l u_1'(x,0)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\
u_1(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{n\pi a t}{l}\right) + B_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi a t}{l}\right)\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
g_n(t) &= \frac{2}{l}\int_0^l g(x,t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\
u_2(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l}{n\pi a}\int_0^t g_n(\tau)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\right) d\tau\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
u(x,t) &= u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t)
\end{aligned}$$