

Preface

This Volume is the answer to a request of the Spanish Academy of Sciences following a tradition which already produced a significant number of monographic issues. I chose the field of the Geometry of Banach Spaces. The invited mathematicians reacted generously by sending their contributions, contained in the pages below. In the name of the Spanish Academy of Sciences I want to thank all of them.

The purpose was—and the authors knew it—two-folded: to present new results and to describe the state of the art of the selected subject. I was convinced that this was the proper approach: it offers to the specialist new contributions and allows the reader to find the sought information presented by an expert. For this endeavor it is not always necessary to present proofs in full detail—sometimes they are missing right away—and is in the surveying, ordering and emphasizing of the results (very recent some of them, a novelty some others) were the added value is. The reader will find a large collection of open problems, fuel for the research activity and a neat evidence of the activity of the field.

The publication of a monographic Volume like this was considered interesting by the Mathematical Section of the Academy, at that moment under the Presidency of Dr. Gregorio Millán Barbany, now deceased. This Volume is devoted to his memory. As the President of the Section, and also personally, he agreed with the project and encouraged it. It is for me a real satisfaction to present it to the Academy and I deeply regret that Dr. Millán did not see it before he passed away.

This issue consist of 18 articles by of 35 authors from Belgium, Bulgaria, Czech Republic, France, Germany, Lithuania, New Zealand, Russia, Serbia, South Africa, Spain, Ukraine and United States,

The paper presented by **M. D. Acosta** is a survey on a subject where active research has been done since the publication of the theorems of Bishop-Phelps and James on norm-attaining functionals. The author gathers a collection of results, including their own's, and formulates several open problems.

The *algebraic dimension* of a vector space is the size of a Hamel basis. In infinite-dimensional Banach spaces X it coincides with the size of X . **T. Banaś** and **A. Plichko** prove the same result for complete metrizable vector spaces, a problem raised by L. Halbeisen. They study the interplay between the property of Baire of a metrizable topological vector space and its hyperspace.

The topological games describe several properties in terms of the existence of winning strategies for some of the “players”. In this paper, **J. Cao** and **W. Moors** modify the so called *Choquet game* to characterize fragmentability, the Namioka property or the class of weakly Stegall spaces.

Instead of interpolating couples of spaces between two of them, a typical method in interpolation theory, **F. Cobos**, **L. M. Fernández-Cabrera** and **A. Martínez** deal with an extension to the “polygonal” case, in which a finite family of Banach spaces is considered. The so called J and K methods unify

the multidimensional procedures. The behavior of compact operators in this framework is also treated.

The presentation that **R. Deville** does of a subject evolving from the finite-dimensional classical analysis —and that has a special interest in the infinite-dimensional case—, the study of the range of the derivative of a differentiable mapping, treats the most important aspects and presents very recent results. For example, the existence of a Gâteaux differentiable Lipschitz function from a Banach space into another such that the distance between derivatives in two different points is uniformly big is discussed. That such a function exists from a separable Hilbert space into another, a result due to P. Hájek and the author, is indeed a surprise.

Two famous examples, one due to J. Bourgain and the other to G. Pisier, prove that the projective tensor product of two Banach spaces with the Radon-Nikodym property can fail to have the same property. **J. Diestel**, **J. Fourie** and **J. Swart** analyze deeply those examples and the tools used. They also give sufficient conditions for a positive result. The style is very dynamical and suggestive. The list of open problems at the end of the paper is a true research program.

The paper signed by **M. Fabian**, **V. Zizler** and myself has the purpose to review several results about differentiability and renorming in Banach spaces, presenting at the same time some new results and a number of new proofs of known facts. One of our main goals is to state a wide list of open problems (an entire section is devoted to it), addressed to researchers, most particularly the young ones, eager to work in this area.

G. Lumer and F. Bauer extended the concept of numerical range of operators between Hilbert spaces to Banach spaces, opening a wide road in this field. In the paper written by **C. Finet** a panorama on an important aspect is shown: the numerical range of certain composition operators on the Hilbert-Hardy space and the space of Dirichlet series. New results on compactness related to fixed points of operators between those spaces are also included. This work connects with the paper by V. Kadets, M. Martín and R. Payá.

A Banach space is “universal” for a certain class when it contains isomorphic copies of every element in the class. In some instances a universal element exists, sometimes not; to decide on this is the matter of an important line of research. **G. Godefroy** solves here a problem posed by J. Lindenstrauss by showing that there is no universal element for the class of strictly convex Banach spaces. The paper proposes three interesting problems and is related to the papers by G. Lancien and E. Odell and Th. Schlumprecht in this Volume.

The usual norm in c_0 depends locally, but at 0, on a finite number of coordinates. This behavior was used for the construction of a C^∞ norm in c_0 and later for C^k -differentiable partitions of unity in reflexive spaces with C^k -differentiable bumps, as well as polyhedral norms and in the study of Asplund $C(K)$ spaces. Norms depending locally of a finite number of coordinates are an essential tool in the theory of higher order smoothness. **P. Hájek** and **V. Zizler** survey in their paper the area and formulate a large collection of open problems.

In connection with the numerical range of an operator (see the paper by C.

Finet in this Volume) G. Lumer introduced the concept of numerical index. In the paper by **V. Kadets**, **M. Martín** and **R. Payá** the most important results in this area are surveyed and a big number (forty five!) of open problems are listed —a complete research program.

The classification of non-separable Banach spaces has been a very active field of research in the last years. **O. Kalenda** characterized a large class (the real WLD Banach spaces) as those spaces with a w^* -Valdivia compact dual unit ball for every equivalent norm. In this Volume the complex version is treated.

M. Lacruz, **V. Lomonosov** and **L. Rodríguez-Piazza** study in his paper the concepts of a strongly compact algebra of operators and of a strongly compact operator between Hilbert spaces, defined by the second named author in his work on the invariant subspace problem for essentially normal operators.

The so called “Szlenk index” was introduced to prove that there is no universal element in the class of separable reflexive Banach spaces (see also the paper by G. Godefroy and by E. Odell and Th. Schlumprecht in this Volume). **G. Lancien** writes a survey showing this and many other applications.

J. López-Abad and **S. Todorcevic** present the state of the art in the study of the structure of the subsequences of a given sequence in a Banach space, specially the null sequences, using as an essential tool the notion of “barrier” introduced by C.St.J.A. Nash-Williams. The analysis is of combinatorial type and uses Ramsey Theory.

A. Moltó, **J. Orihuela**, **S. Troyanski** and **M. Valdivia** developed in the last few years some renorming techniques of wide spectrum. Here they emphasize the role of the approximation and rigidity conditions in their definitions of σ -slice continuity and σ -continuity.

The problem of universality for a class of Banach spaces has been considered in this Volume by different authors (see, for example, the papers of G. Godefroy and G. Lancien). In this paper **E. Odell** and **Th. Schlumprecht** deal with this and a second problem (closely related or sometimes equivalent): to decide if all Banach spaces with a certain property (P) can be embedded in another Banach space with property (P) and a finite-dimensional decomposition.

The paper by **E. Oja** is related to an important open problem in the theory of approximation of operators in Banach spaces: to know whether the approximation property implies the metric approximation property in the dual X^* of a Banach space X . The result is true if X^* or X^{**} have the Radon-Nikodym property. The author analyzes the same situation with respect to the weak λ -bounded and the λ -bounded approximation properties. The paper is related to the one by J. Diestel, J. Fourie and J. Swart in this Volume.

I want to thank again, in the name of the Spanish Academy of Sciences, the participating authors and the referees, which offered their professional advice. The publication of this Volume on this year, when the International Congress of Mathematics will be held in Spain, is a happy coincidence and another contribution of the Spanish Academy to this important event.

Last but not least, I want to thank Òscar Moneris Belda for his help in editing this Volume. No doubt that things should have been much more difficult

without his assistance.

Vicente Montesinos Santalucía

Prefacio

Este Volumen responde a un encargo de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, siguiendo una tradición que ha proporcionado ya una larga lista de números monográficos. Elegí el activo campo de la Geometría de los Espacios de Banach. Los matemáticos invitados respondieron con generosidad enviando sus contribuciones. El resultado está en las páginas que siguen. En nombre de la Real Academia quiero agradecerles su colaboración.

Se ha pretendido —y así se les indicó a los participantes— que los trabajos cumplieran dos objetivos: presentar nuevos resultados y describir el estado de la cuestión en el tema elegido. Tengo el convencimiento de que este enfoque es muy deseable: no sólo descubre al especialista una nueva aportación, sino que proporciona al lector que se acerque al tema la información deseada de la mano de un experto. Para este propósito no siempre es necesario incluir las pruebas —en algunos casos no se ha hecho así— y es en la recopilación, ordenación y priorización de los resultados (muchos de ellos muy recientes y algunos inéditos) donde se encuentra su “valor añadido”. El lector encontrará multitud de problemas abiertos, motor de la actividad investigadora y prueba evidente del dinamismo del tema.

La propuesta de este número monográfico fue acogida con interés por la Sección de Exactas de la Academia, entonces presidida por el ahora desaparecido Excmo. Sr. D. Gregorio Millán Barbany, a cuya memoria quiero dedicar este Volumen. Como Presidente de la Sección, y también a título personal, dio el visto bueno al proyecto y me animó a llevarlo a cabo. Es para mí una satisfacción dar por concluido el encargo y lamento profundamente que él no pueda verlo.

En 18 artículos han participado un total de 35 autores de África del Sur, Alemania, Bélgica, Bulgaria, España, Estados Unidos, Francia. Lituania, Nueva Zelanda, República Checa, Rusia, Serbia y Ucrania.

El trabajo presentado por **M. D. Acosta** es una recopilación de resultados sobre un tema que ha sido objeto de investigación muy activa desde que aparecieron el teorema de Bishop-Phelps y el de James, el estudio de los funcionales que alcanzan el supremo sobre un conjunto acotado de un espacio de Banach. La autora recoge muchos resultados, propios y ajenos, y enuncia varios problemas abiertos.

La *dimensión algebraica* de un espacio vectorial es el tamaño de una base de Hamel. En espacios de Banach X de dimensión infinita coincide con el tamaño de X . **T. Banach** y **A. Plichko** prueban que el mismo resultado es cierto en

espacios vectoriales topológicos metrizable y completos, un problema planteado por L. Halbeisen, estableciendo en su estudio relaciones sobre la propiedad de Baire de un espacio vectorial topológico metrizable y su hiperespacio.

Los juegos topológicos han servido para describir ciertas propiedades en términos de la existencia de estrategias ganadoras para alguno de los “jugadores”. En este trabajo, **J. Cao** y **W. Moors** modifican uno de los juegos más conocidos, introducido por G. Choquet, para caracterizar fragmentabilidad, la propiedad de Namioka o la clase de los espacios “débilmente Stegall”.

En lugar de interpolar parejas de espacios de Banach entre otros dos, un método típico en la teoría de interpolación, **F. Cobos**, **L. M. Fernández-Cabrera** y **A. Martínez** tratan una extensión al caso “poligonal”, en el que se trata de familias finitas de espacios de Banach. Los métodos J y K unifican los procedimientos multidimensionales. Se analiza el comportamiento de los operadores compactos en esta teoría de interpolación.

La presentación que **R. Deville** hace de un tema que deriva directamente del análisis clásico finito-dimensional y que cobra gran interés en el caso infinito-dimensional, el estudio del rango de la derivada de una función diferenciable, recorre los aspectos más importantes y recoge resultados que han aparecido muy recientemente. Por ejemplo, se discute la existencia de una función Lipschitziana y Gâteaux diferenciable entre dos espacios de Banach de forma que la distancia entre las derivadas en dos puntos distintos cualesquiera es uniformemente grande. Que tal función exista entre dos espacios de Hilbert separables, resultado que es debido a él mismo y a P. Hájek, resulta cuando menos sorprendente.

Dos famosos ejemplos, uno debido a J. Bourgain y el otro a G. Pisier, establecen que el producto tensorial proyectivo de dos espacios de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym puede no tener la misma propiedad. **J. Diestel**, **J. Fourie** and **J. Swart** analizan en profundidad estos ejemplos y las herramientas más importantes usadas por aquellos. No sólo eso, sino que proporcionan muchas situaciones en las que el resultado es positivo, sino que la exposición es sugerente, penetrante y animada. La lista de problemas abiertos con los que concluye el trabajo es todo un programa de investigación.

El trabajo que presentamos **M. Fabian**, **V. Zizler** y yo mismo tiene como objetivo recopilar un buen número de resultados sobre diferenciabilidad y renormamiento en espacios de Banach, dando al mismo tiempo varios resultados nuevos y algunas pruebas diferentes de hechos conocidos. Sobre todo, es nuestro interés enunciar una lista amplia de problemas abiertos en este campo (dedicamos una sección entera a ello), con la vista puesta en los investigadores que quieran introducirse en esta área, especialmente los jóvenes.

G. Lumer y F. Bauer extendieron el concepto de rango numérico de los operadores definidos en espacios de Hilbert a espacios de Banach, dando lugar a una vasta literatura sobre el tema. En el trabajo que presenta **C. Finet** se muestra una panorámica sobre un aspecto específico e importante: el rango numérico de ciertos operadores de composición sobre el espacio de Hilbert Hardy y el espacio de series de Dirichlet. Se tratan también cuestiones de compacidad ligadas a puntos fijos de operadores en estos espacios, una contribución inédita.

El trabajo se relaciona con el presentado por V. Kadets, M. Martín y R. Payá.

Un espacio de Banach es “universal” para una clase cuando contiene copias isomorfas de cualquier elemento de la clase. En ciertos casos existe tal elemento, en otros no; dilucidarlo es objeto de una importante línea de investigación. Aquí, **G. Godefroy** resuelve un problema de J. Lindenstrauss probando que no existe elemento universal para la clase de espacios de Banach que poseen una norma equivalente estrictamente convexa. El artículo formula tres problemas especialmente interesantes y se conecta de forma natural a los trabajos que en este mismo Volumen presentan G. Lancien y E. Odell y Th. Schlumprecht.

La norma usual en c_0 tiene la propiedad de depender localmente (excepto en 0) de un número finito de coordenadas. Este comportamiento fue usado inicialmente para construir una norma equivalente de clase C^∞ en c_0 y, posteriormente, para construir particiones de la unidad C^k -diferenciables en espacios reflexivos con funciones meseta C^k -diferenciables, así como en el estudio de normas poliédricas y en el análisis de espacios de Asplund de tipo $C(K)$. Es un instrumento esencial en la teoría de diferenciabilidad de orden superior en espacios de Banach. **P. Hájek** y **V. Zizler** presentan en su artículo una panorámica de los resultados conocidos en esta área, y plantean —y discuten— una extensa colección de problemas abiertos que pueden dirigir investigaciones posteriores.

En relación con el rango numérico de un operador (ver el trabajo de C. Finet en este Volumen) G. Lumer sugirió el concepto de índice numérico de un espacio de Banach. En el trabajo que presentan **V. Kadets**, **M. Martín** y **R. Payá** se exponen los resultados más importantes en este campo y se plantea un número importante (¡cuarenta y cinco!) de problemas, un programa completo de investigación.

La clasificación de los espacios de Banach no separables ha sido un campo de trabajo muy activo en los últimos años. **O. Kalenda** había caracterizado una clase muy general (los espacios reales WLD) como aquellos en los que, para cualquier norma equivalente, la bola del dual, con la topología w^* , es un compacto de Valdivia. En este trabajo extiende el resultado a los espacios complejos.

En el artículo que presentan **M. Lacruz**, **V. Lomonosov** y **L. Rodríguez-Piazza** se discute el concepto de álgebra fuertemente compacta de operadores y de operador fuertemente compacto en un espacio de Hilbert, dos conceptos definidos por el segundo autor en su trabajo sobre el problema del subespacio invariante para operadores esencialmente normales.

El llamado “índice de Szlenk” fue introducido para probar que no existe un elemento universal en la clase de los espacios de Banach reflexivos y separables (ver los trabajos de G. Godefroy y de E. Odell y Th. Schlumprecht en este Volumen). Es analizado en esta aportación de **G. Lancien**, en la que se muestra ésta y muchas otras de sus aplicaciones.

J. López-Abad y **S. Todorčević** exponen el estado de la cuestión de la estructura de las subsucesiones de una sucesión dada en un espacio de Banach real, especialmente de las sucesiones nulas, usando como instrumento esencial la noción de barrera introducida por C.St.J.A. Nash-Williams. El análisis es combinatorio y usa la teoría de Ramsey.

Los autores firmantes del siguiente artículo. **A. Moltó, J. Orihuela, S. Troyanski** y **M. Valdivia**, han desarrollado en los últimos años técnicas de renormamiento de especial alcance. Aquí hacen énfasis en las propiedades de aproximación y rigidez que aparecen en sus definiciones de σ -continuidad seccional y σ -continuidad.

El problema de la universalidad para una clase de espacios de Banach ha sido considerado en este Volumen en varios artículos (ver, por ejemplo, los de G. Godefroy y de G. Lancien). En este trabajo **E. Odell** y **Th. Schlumprecht** tratan éste y otro problema (que, en muchos casos, está íntimamente relacionado con o es incluso equivalente al anterior): saber si todo espacio de Banach con cierta propiedad (P) puede sumergirse en otro espacio de Banach con la misma propiedad y con una descomposición finito-dimensional.

El trabajo de **E. Oja** está relacionado con un importante problema abierto en la teoría de la aproximación de operadores en los espacios de Banach: saber si la propiedad de aproximación implica la de aproximación métrica en el caso del dual X^* de un espacio de Banach X . Este resultado es cierto si X^* o X^{**} tienen la propiedad de Radon-Nikodym. La autora analiza la situación respecto a la propiedad de aproximación débil λ -acotada y λ -acotada. El trabajo de J. Diestel, J. Fourie y J. Swart en este Volumen está conectado con éste.

Quiero dar las gracias de nuevo, en nombre de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España, a los autores participantes y a los revisores, que han ofrecido su consejo profesional. La publicación de este Volumen en este año en el que se celebra en España el Congreso Mundial de Matemáticas es una coincidencia feliz y otra contribución de la Academia al mismo.

Quiero también agradecer a Òscar Moneris Belda su ayuda inestimable en la edición de este Volumen. Sin él las cosas hubieran sido mucho más difíciles.

Vicente Montesinos Santalucía

