

# Optimización de Rutas con Algoritmos de Reconstrucción y Cristalización Simulada Oscilatoria

**Josep R. Medina Folgado**

Catedrático, Departamento de Ingeniería e Infraestructura de los Transportes,  
Universidad Politécnica de Valencia, España

**Víctor Yepes Piqueras**

Director del Área de Producto, *Agència Valenciana del Turisme,*  
*Generalitat Valenciana,* España

## RESUMEN

La ponencia describe una metaheurística de resolución de problemas de optimización combinatoria basada en un esquema de cristalización simulada de reinicios múltiples a temperaturas decrecientes y que emplea en la búsqueda diversos operadores, entre los cuales figuran los de reconstrucción de soluciones. Esta estrategia es adecuada a los problemas con espacios de soluciones abruptos, discontinuos y con numerosas restricciones. Se aplica la estrategia propuesta a un problema de rutas con ventanas temporales VRPTW empleando como función objetivo el beneficio económico y se analiza la influencia de algunos parámetros de la metaheurística.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de optimización combinatoria tales como los de las rutas de los vehículos se abordan mediante técnicas metaheurísticas que permiten obtener soluciones cercanas a las óptimas empleando tiempos de cálculo razonables. Estas estrategias se basan en numerosas ocasiones en métodos de búsqueda local cuyo mayor inconveniente es el estancamiento en soluciones que son óptimos relativos. Además, determinados tipos de problemas como puede ser el VRPTW, presentan un espacio de soluciones muy abrupto y discontinuo, donde una solución similar a otra, pueden presentar fuertes diferencias en la valoración de sus funciones objetivo. Además, la probabilidad de alcanzar un resultado mejor que el actual en numerosas ocasiones es muy reducido. Estos problemas presentan, al mismo tiempo, el inconveniente de estar sujetos a numerosas restricciones.

La técnica de reconstrucción (Schrimpf *et al.*, 2000) supone la eliminación de los arcos entre puntos dentro de un radio de proximidad a nodo elegido y recompone la mejor solución factible con los clientes que han quedado sueltos. Ello permite, frente a otras técnicas, disponer en todo momento -si se considera oportuno- de soluciones que cumplen todas las restricciones. Asimismo, se pueden admitir violaciones a las restricciones mediante otro tipo de movimiento más rápido de computar y, en una fase posterior, aplicar la técnica propuesta a los clientes que presenten rupturas en sus

ventanas temporales. En la ponencia se describe el empleo de la cristalización simulada empleando como movimiento la reparación de soluciones. Se emplean recalentamientos oscilatorios decrecientes (Thangiah *et al.*, 1994) para garantizar la diversificación.

## 2. ALGORITMOS DE DESTRUCCIÓN Y RECONSTRUCCIÓN

El principio de destrucción y reconstrucción de soluciones (ver Schrimpf *et al.*, 2000) origina una heurística que permite obtener resultados de calidad en los problemas combinatorios. Se trata, en primer lugar, de romper una parte significativa de una solución inicial para después recomponerla de modo que la alternativa tenga opciones de mejorar la función objetivo de la solución primitiva. La heurística de reconstrucción supone un operador o movimiento complejo que define un entorno de la solución inicial y un óptimo relativo.

El algoritmo de reparación permite amplios movimientos de la solución inicial y por ello presenta ciertas ventajas frente a otros operadores más sencillos, sobre todo en aquellos problemas combinatorios de cierta complejidad:

- Problemas con espacios de soluciones discontinuos, es decir, donde una pequeña alteración de la opción primitiva supone un gran cambio en el valor de la función objetivo.
- Escenarios sometidos a fuertes y numerosas restricciones, donde incluso es difícil encontrar soluciones factibles.
- Topologías del espacio de soluciones donde pasar de una solución alternativa a otra mediante un movimiento sea muy difícil o imposible.
- Problemas con múltiples funciones objetivo.

La reconstrucción de soluciones, en la versión que se presenta, es una estrategia de búsqueda por entornos aleatoria, puesto que, aunque los mecanismos de restauración son deterministas, los de destrucción no lo son. Ello significa que uno de los parámetros que define arbitrariamente el óptimo relativo será el número de iteraciones. Ésta magnitud debe ser lo suficientemente elevada para que la probabilidad de encontrar una mejora a la solución actual sea muy pequeña.

### 2.1 La destrucción de una solución

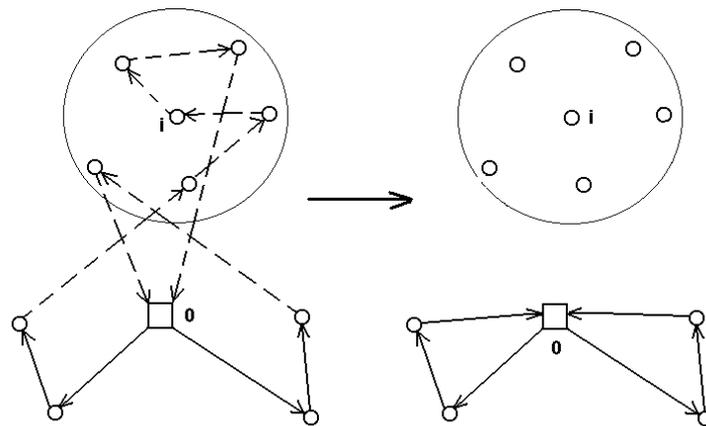
La ruina parcial de una solución se define por un conjunto de nodos determinado. Los clientes seleccionados se separan de sus rutas, quedando una solución degenerada que, según se observa en la Figura 1, sustituye los enlaces de entrada y salida al nodo desconectado por otro que conecta al cliente anterior y posterior en su ruta. En el caso de ser un cliente con un itinerario de ida y vuelta al depósito, ésta desaparece.

Se definen dos estrategias de ruina de una solución:

- **Destrucción radial:** Dado un nodo elegido al azar y un parámetro  $r$ , quedan desconectados el

cliente seleccionado y aquellos otros más cercanos a él. Se elige probabilísticamente un valor en el número de nodos liberados que oscila entre 0 y  $r$ : La cercanía queda determinada por la suma de la distancia física más la separación ficticia correspondiente a la espera mínima calculada para el vehículo más rápido de la flota. Se separan  $r+1$  clientes como mucho, y siempre al menos uno, que es el pivote.

- **Destrucción aleatoria:** En el mismo caso anterior, los  $r$  clientes se eligen también al azar, desconectándose un número de ellos que oscila desde 0 hasta  $r$ : Quedan cortados  $r+1$  nodos como máximo.



**Fig. 1 – Destrucción y reconstrucción de los enlaces de los clientes más próximos a  $i$ .**

En el algoritmo que presentamos, los clientes que se aíslan se designan de forma equiprobable. El parámetro  $r$  indica el número máximo de nodos a desconectar, además del elegido en primer lugar como pivote. Además, se selecciona el criterio de ruina con igual probabilidad entre la destrucción radial y la aleatoria.

## 2.2 Reconstrucción de soluciones

Los nodos deben asignarse de nuevo a alguna ruta y así construir una solución al problema planteado. Se opta por un algoritmo determinístico y voraz. En primer lugar se inserta el nodo entre todos los posibles lugares de la solución degenerada, incluyendo el caso del inicio de una nueva ruta. Seguidamente se establece la situación que mayor la función objetivo. Este cálculo se continúa para todos los clientes sin ruta y al final se inserta aquel nodo y aquella posición que proporciona un beneficio superior. Con ello se consigue otra solución incompleta, procediéndose de igual forma hasta que se incluyan todos los nodos.

## 3. CRISTALIZACIÓN SIMULADA OSCILATORIA

La cristalización simulada (ver Kirkpatrick *et al.*, 1983) utiliza conceptos originalmente descritos por la mecánica estadística. Se trata de una búsqueda por entornos donde se seleccionan aleatoriamente

a los candidatos que se aceptan como solución actual si mejoran a la precedente o bien se aceptan soluciones peores con una probabilidad  $P$ , según la Ecuación (1), que decrece según aumenta la diferencia entre las funciones objetivo de la alternativa candidata y la actual.

$$P = \exp(-\Delta/t_k) \quad (1)$$

Donde,  $\Delta$ : diferencia entre el valor de la función objetivo del candidato y la de la solución actual  
 $t_k$ : temperatura actual

El parámetro de control, la temperatura  $t_k$ , se mantiene para un número definido de movimientos denominado como *cadena de Markov*. Tras este grupo de operaciones, se produce un enfriamiento, continuando la búsqueda con una nueva cadena. El proceso termina cuando transcurren  $C$  cadenas o bien no aparecen mejoras en un número consecutivo de ellas. En la estrategia propuesta se admiten recalentamientos para mejorar la exploración. La metaheurística es capaz de encontrar asintóticamente la solución óptima, aunque sea tras un número infinito de pasos. Sin embargo, la obtención de buenos resultados en tiempo polinomial es posible si se encuentra una combinación acertada de parámetros y operadores para el problema que se pretende resolver.

### 3.1 Selección de la temperatura inicial

Una heurística de búsqueda no debería depender de la solución de partida. En la cristalización simulada ello es posible si la temperatura inicial es elevada, es decir, si la probabilidad en la elección de soluciones peores es significativa. Cuando este parámetro es demasiado pequeño, la región de búsqueda también lo es, y por tanto se debería adoptar una temperatura inicial adecuada a cada problema. La metaheurística parte de un parámetro de control provisional  $t_0$ . Tras aplicar un movimiento o conjunto de ellos un número de veces igual a una cadena de Markov, se obtiene un porcentaje de aceptaciones que, si se encuentra entre el 20 y el 40%, sirve para validar la temperatura inicial con el valor  $t_0$ . Si el número de cambios permitidos es inferior al previsto, el parámetro se duplica y se repite el proceso. Análogamente, si la tolerancia es excesiva, se divide la temperatura a su mitad y se procede de igual modo. Así,  $t_0$  se adapta a la estructura del problema.

### 3.2 Velocidad de enfriamiento

El parámetro definido como temperatura desciende paulatinamente para disminuir progresivamente la probabilidad en la elección de peores soluciones. Para cada temperatura, se ensayan un número de movimientos que es igual a la cadena de Markov elegida. Si la cadena es larga y el enfriamiento lento, la obtención de una buena solución es más probable, pero el tiempo de cálculo se alarga rápidamente. Por tanto, una elección conveniente en la longitud de la cadena y del programa de enfriamiento es crucial en la obtención de una buena solución en tiempo razonable. Se ha considerado una velocidad de decrecimiento geométrica, según se establece en la Ecuación (2):

$$t_{i+1} = r \cdot t_i \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

Donde,  $t_i$ : temperatura de la actual cadena de Markov

$t_{i+1}$ : temperatura de la siguiente cadena de Markov

$r$ : parámetro de enfriamiento

### 3.3 Recalentamientos decrecientes

Si después de un número determinado de cadenas no existe ninguna mejora de la solución actual, la metaheurística considera que ha llegado a un óptimo relativo, puesto que la temperatura es tan baja que la probabilidad de salvarlo es muy reducida. Es entonces cuando algunos autores (Dowland, 1993) sugieren un recalentamiento para diversificar la búsqueda. Se plantea un esquema (ver Thangiah *et al.*, 1994) que permita reiniciar nuevas exploraciones incrementando nuevamente la temperatura. Para ello se define una “temperatura *reset*”  $t_r$ , que es igual a  $t_0$  cuando se inicia el procedimiento. Así, cuando se ha alcanzado un óptimo local, el sistema se vuelve a calentar a una temperatura  $t_r$ :

$$t_r = \max(t_r/2, t_b) \quad (3)$$

Donde,  $t_r$ : temperatura

$t_b$ : temperatura a la cual se ha encontrado la solución actual

Esta búsqueda se repite  $R$  de veces, siendo este valor un número predeterminado como parámetro de la metaheurística. El algoritmo empleado queda definido como sigue:

*Paso 1: Construcción de una solución inicial.*

*Paso 2: Determinar el conjunto de operadores aplicables, así como sus probabilidades.*

*Paso 3: Determinar como parámetros iniciales  $t_0$ , el número máximo de resets  $R_r$ , el coeficiente de enfriamiento  $r$ , la longitud de la cadena de Markov y el total de cadenas  $C$ . Hacer número de resets  $R=0$ .*

*Paso 4: Repetir durante un número igual a la cadena de Markov:*

*Calcular la función objetivo para la solución actual  $F(S)$  y para una nueva solución obtenida tras un movimiento seleccionado probabilísticamente de los posibles  $F(S')$ .*

*Evaluar  $D=F(S')-F(S)$ .*

*Aceptar  $S=S'$  si  $\{(D \leq 0)\}$  o  $\{D > 0 \text{ y } \exp(-D/t_i) \geq q\}$  donde  $q$  es un número aleatorio entre  $[0, 1]\}$ .*

Si  $D \leq 0$  entonces  $S_b = S$ .

Paso 5: Calcular el porcentaje de aceptaciones respecto al total de movimientos. Si es superior a 0,2 e inferior a 0,4 entonces:

Tomar como temperatura inicial  $t_0$ .

Determinar  $t_0 = t_b = t_k = t_r$ .

Ir al Paso 6.

En caso contrario

Duplicar  $t_0$  si el porcentaje es menor a 0,2 o dividir por la mitad si es mayor a 0,4.

Ir al Paso 4.

Paso 6: Repetir durante un número de veces igual a la cadena de Markov:

Calcular la función objetivo para la solución actual  $F(S)$  y para una nueva  $F(S')$  obtenida tras un movimiento seleccionado probabilísticamente.

Evaluar  $D = F(S') - F(S)$ .

Aceptar  $S = S'$  si  $\{(D \leq 0)\}$  o  $\{D > 0 \text{ y } \exp(-D/t_k) \geq q\}$  donde  $q$  es un número aleatorio entre  $[0, 1]$ .

Si  $D \leq 0$  entonces  $S_b = S$  y  $t_b = t_k$ .

Paso 7: Si el número de cadenas de Markov es inferior a  $C$ , entonces

Hacer  $k = k + 1$ . Modificar la temperatura usando la Ecuación (2).

Ir al Paso 8.

En caso contrario

Ir al Paso 9.

Paso 8: Si se alcanzan 10 cadenas consecutivas de Markov sin mejoras y  $R \leq R_T$  entonces:

Recalentar con  $t_r = \max(t_r/2, t_b)$

Hacer  $t_k = t_r$ .

Ir al Paso 6.

En caso contrario

Ir al Paso 9.

Paso 9: Tomar como mejor solución  $S_b$  y terminar.

#### 4. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Se analiza el problema R103 de Solomon (1987) con coeficientes que definen la función objetivo según el tipo A, reflejados en la Tabla 1. Todas las soluciones parten del resultado obtenido por una heurística económica y secuencial de construcción de rutas. La metaheurística híbrida propuesta se basa en la cristalización simulada oscilatoria aplicando la exploración aleatoria con múltiples operadores y criterios de reconstrucción de soluciones. Se han empleado como movimientos: 1-rel y 2-rel (salto de un nodo en su misma ruta o a otra); 1-sw, y 2-sw (intercambio entre nodos de la misma o distinta rutas), 2-opt\*, Cross, (2-1), y además el operador de reconstrucción (RRr), el de

$r=0$  (RR0) y el reductor de rutas –donde se destruye la ruta con menor número de nodos-. Los 7 primeros son movimientos simples y los 3 últimos complejos. Las probabilidades elegidas figuran en la Tabla 2. Se consideran 2000 cadenas de Markov de una longitud 100. La temperatura inicial  $T_0=1000$ . Se permiten 25 recalentamientos y un máximo de 10 cadenas en blanco. El enfriamiento geométrico es  $r=0,95$ . Se han realizado 9 ensayos para RR5, RR10 y RR15 respectivamente. Los resultados se recogen en la Tabla 3, donde se indican el número de rutas, la distancia recorrida y el beneficio obtenido.

Tarifa fija por disposición del servicio $F_j$	50	Coste unitario distancia $C_{d_k}$	100
Tarifa por unidad y distancia $R_{q_d_j}$	1	Coste horario $Ch_k$	10
Coste fijo por inicio de ruta $C_{r,k}$	1000	Penalización horaria por espera $C_j^e$	10
Penalización ruptura ventana temporal $r_j^u$	10000	Penalización horaria tras ruptura ventana temporal $C_j^u$	1000

**Tabla 1 – Definición de parámetros para la función objetivo para los problemas A aplicables a los problemas de Solomon (1987).**

Operador	Prob	Operador	Prob	Operador	Prob	Operador	Prob	Operador	Prob
1-rel	10	1-sw	10	2-rel	7	2-sw	10	RR $\rho$	1
2-opt*	30	Cross	20	(2-1)	10	RR0	1	RedRut	1

**Tabla 2 – Probabilidades elegidas, en porcentajes, para 10 operadores de la metaheurística**

R103-A	mínimo	media	máximo	C.V. %
$\rho=5$	14	14,00	14	0,000
	1308,5	1266,10	1243,65	1,629
	-131464,03	-129311,67	-126916,70	-1,151
$\rho=10$	14	14,00	14	0,000
	1299,15	1267,35	1253,94	1,353
	-130810,88	-129326,89	-127686,00	-0,714
$\rho=15$	14	14,00	14	0,000
	1285,94	1258,02	1241,16	1,434
	-130548,56	-128451,18	-127611,08	-0,788

**Tabla 3 – Resultados de 9 ensayos en el problema R103 tipo A.**

La mejor solución publicada con metaheurísticas (Thangiah *et al.*, 1994) para el R103 con el criterio jerárquico de mínimo número de rutas y distancia fue de 13 y 1207 respectivamente. Estas cifras no son totalmente comparables con los resultados alcanzados, al ser diferentes las funciones objetivo. El mismo problema con ventanas temporales blandas VRPSTW (un permiso de inicio del servicio un

10% antes del horario de apertura y un 5% en el de cierre, ambos con penalizaciones), con la metaheurística descrita y  $\rho=5$ , con un solo ensayo, consigue un beneficio de -115523,80, 12 rutas y una distancia de 1196,00. Esta circunstancia apunta al hecho de que los horarios flexibles pueden proporcionar una mejor calidad a la solución, permitiendo evaluar mediante penalizaciones la insatisfacción del cliente.

El algoritmo se ha programado en Visual BASIC 5.1 para su uso en ordenadores personales. La duración media ha sido, en un código no optimizado y en un ordenador Compaq 127Mb Ram y procesador Pentium III de 933 Mhz, de 1600, 3048 y 6388 segundos para  $\rho=5$ , 10 y 15, respectivamente. Tanto los resultados medios como los mejores no ofrecen diferencias significativas, por lo que un criterio simple de reconstrucción con  $\rho=5$  es preferible a otros más complejos. También se destaca el hecho que la metaheurística no ha reducido, en este caso, el número de vehículos necesarios. Asimismo se comprueba que el criterio económico de máximo beneficio no concuerda con el de mínima distancia.

## 5. CONCLUSIONES

La ponencia ha descrito una metaheurística híbrida basada en un esquema de cristalización simulada con reinicios a temperaturas decrecientes, empleando para ello múltiples operadores, entre ellos algunos de recomposición de soluciones. Entre las ventajas de la estrategia, además de las inherentes a la cristalización simulada en cuanto a su relativa independencia de las soluciones iniciales y su tendencia asintótica a la solución óptima; se encuentran la adecuación del operador de reconstrucción a espacios de soluciones abruptos y discontinuos, con numerosas restricciones; la diversificación en la búsqueda por los múltiples comienzos, y la ampliación del entorno de búsqueda al utilizar diversos operadores de forma aleatoria. La aplicación a un problema concreto indica cómo la elección de la función objetivo influye en el resultado final y cómo cierta flexibilización con penalizaciones de las ventanas temporales mejoran sensiblemente las soluciones. También se ha observado cómo la reconstrucción de las soluciones no precisa de elevados tiempos de cálculo, pues la influencia de tamaño de la destrucción es poco relevante en los resultados con la estrategia planteada.

## REFERENCIAS

- DOWSTAND, K.A. (1993). Some Experiments with Simulated Annealing Techniques for Packing Problems. *European Journal of Operational Research* 68(3), pp. 389-399.
- KIRKPATRICK, S.; GELATT, C.D.; VECCHI, M.P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science* 220(4598), pp. 671-680.
- SCHRIMPF, G. *et al.* (2000). Record Breaking Optimization Results Using the Ruin and Recreate Principle. *Journal of Computational Physics* 159, pp. 139-171.
- SOLOMON, M.M. (1987). Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operations Research* 35(2), pp. 254-265.
- THANGIAH, S.R.; OSMAN, I.H.; SUN, T. (1994). Hybrid Genetic Algorithm, Simulated

Annealing and Tabu Search Methods for Vehicle Routing Problems with Time Windows. Technical Report 27, Computer Science Department, Slippery Rock University. 37 pp.

YEPES, V.; MEDINA, J.R. (2000). Optimización del problema generalizado de las rutas con restricciones temporales y de capacidad (CVRPSTW), en COLOMER, J.V. y GARCÍA, A. (Eds.): *Calidad e innovación en los transportes. Actas del IV Congreso de Ingeniería del Transporte*. Vol. 2, pp. 705-710. Valencia.