Problemas propuestos

1. Estudie las siguientes cuádricas y clasifíquelas:

(a) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$

(b) $2x^2 + 4x + 2y^2 + 2z^2 - 4z = 0$

(c) $4 - x^2 - y^2 - z = 7$

(d) $3z^2 - y^2 = 9$

(e) $x^2 + 4x + y^2 - z^2 + 4 = 0$

2. Clasifique las siguientes cuádricas:

(a) $x^2 + y^2 + 3y - 2z = 0$

(b) $2x^2 + y^2 - 2y = 0$

(c) $3x^2 = 1$

(d) $2x^2 - 2x - z^2 - y = 0$

(e) $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{3}y^2 + \sqrt{5}z^2 - 4z = 0$

(f) $2x^2 + 4x + 2y^2 - 2z^2 - 4z = 0$

(g) $x + y^2 + z^2 - \sqrt{3}z = 2$

(h) $-x^2 - 2z^2 = -3$

3. Dadas las siguientes cuádricas, deduzca su clasificación hallando los cortes con planos paralelos a los planos coordenados:

(a) $x^2 - 2y^2 = 3z$

(b) $5x^2 - 2y^2 = \frac{1}{2}z^2$

(c) $6x^2 + 2y^2 = 2$

(d) $(x-1)^2 + (y+1)^2 - (z-2)^2 = 4$

4. Dadas las siguientes cuádricas:

(a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 5z + 1 = 0$

(b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 4 = 0$

obtenga las posibles intersecciones con los planos $z = k$, $x = m$, $y = n$.

5. Deduzca la clasificación de la siguiente cuádrica según los valores que pueda tomar el parámetro λ

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 5y - z + \lambda.$$

6. Determine la familia de rectas generatrices de las siguientes cuádricas regladas:

(a) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$

(b) $x^2 + 9z^2 = 9$

(c) $x^2 + y^2 - 2y = z^2 - 1$

En los siguientes problemas, obtenga la ecuación reducida y clasifique las correspondientes cuádricas:

7. $xy + xz + yz - 2x - y + 3z + 13 = 0$

Solución: $-z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 = 20$, hiperboloide de una hoja.

8. $10x^2 + 10y^2 + 6z^2 - 14xy - 6xz - 6yz + 17x - 17y + 9 = 0$

Solución: $3z_1^2 + 17z_2^2 = \frac{1}{2}$, cilindro elíptico.

9. $2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 4x - 2y - 4z + 6 = 0$

Solución: $z_1^2 + z_2^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}z_3 = 0$, paraboloide elíptico de revolución.

10. $x^2 - y^2 + 6xy - 5 = 0$

Solución: $3z_1^2 - 3z_2^2 = 5$, cilindro hiperbólico.

11. $x^2 + 2yz + 2x + 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$

Solución: $-z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 = 6$, hiperboloide de dos hojas.

12. $2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - \sqrt{2}y + \sqrt{2}z = 0$

Solución: $z_3 = z_1^2 + z_2^2$, paraboloide elíptico de revolución.

13. $-z^2 + xy - 4x + 2z + 5 = 0$

Solución: $-z_1^2 + z_2^2 + 2z_3^2 = 12$, hiperboloide de una hoja.

14. $xy + xz + yz - 1 = 0$

Solución: $z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 - \frac{1}{2}z_3^2 = 1$, hiperboloide de dos hojas.

15. $x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}xy + x + \sqrt{3}y - 2z = 0$

Solución: $z_1^2 - z_2^2 - z_3 = 0$, paraboloide hiperbólico.

16. $x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 1 = 0$

Solución: $z_2 = \frac{1}{2}z_3^2 - \frac{3}{2}z_1^2$, paraboloide hiperbólico.

17. $3x^2 - z^2 + 4xy + 2\sqrt{5}x + \sqrt{5}y + 2z = 0$

Solución: $-16z_1^2 - 16z_2^2 + 64z_3^2 = 9$, hiperboloide de dos hojas.

18. $2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - y + z = 0$

Solución: $z_3 = \sqrt{2}z_1^2 + \sqrt{2}z_2^2$, paraboloide elíptico de revolución.

19. $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2\sqrt{3}xy - 1 = 0$

Solución: $4z_1^2 + 8z_2^2 + 3z_3^2 = 1$, elipsoide.

20. $$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (0\ 0\ -6)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 1 = 0$$

Solución: $3z_1^2 + 5z_2^2 - 9z_3^2 = 0$, cono.

21. $$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (2\ 0\ 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 1 = 0$$

22. Clasifique en función del parámetro μ la cuádrica:

$$7x^2 + 5y^2 - 3z^2 - 2\sqrt{3}xy + 28x - 4\sqrt{3}y + 18z + 1 - \mu = 0$$

Justifique que la cuádrica es reglada si $\mu \geq 0$.

Solución:

Si $\mu > 0$: $\frac{8}{\mu}z_1^2 + \frac{4}{\mu}z_2^2 - \frac{3}{\mu}z_3^2 = 1$, hiperboloide de una hoja.

Si $\mu < 0$: $\frac{3}{-\mu}z_3^2 - \frac{8}{-\mu}z_1^2 - \frac{4}{-\mu}z_2^2 = 1$, hiperboloide de dos hojas.

Si $\mu = 0$: $3z_3^2 = 8z_1^2 + 4z_2^2$, cono.

23. Obtenga la ecuación reducida y clasifique la siguiente cuádrica en función de los valores del parámetro μ,

$$4x^2 - 4xy + y^2 + \mu z + 1 = 0.$$

Solución:

Si $\mu \neq 0$: $5z_1^2 + \mu z_2 = 0$, cilindro parabólico.

Si $\mu = 0$: $5z_1^2 + 1 = 0$, no hay cuádrica.