Problemas resueltos

1. Halle la longitud de la curva dada por la parametrización

$$\alpha(t) = t\,\vec{\imath} + \frac{4}{3}t^{3/2}\,\vec{\jmath} + \frac{1}{2}t\,\vec{k}, \quad t \in [0,2].$$

Solución:

$$\alpha'(t) = (1, 2t^{1/2}, \frac{1}{2}), \qquad t \in [0,2].$$

La curva α es de clase $\mathcal{C}^1$ y, por tanto, es rectificable.

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4t + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5+16t}$$

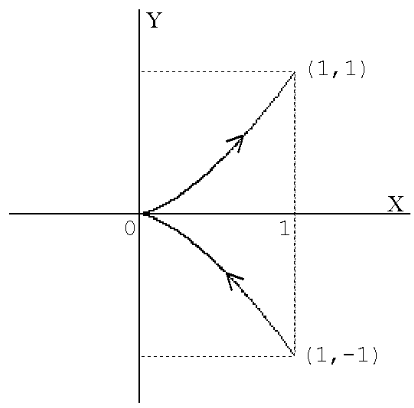
La longitud de α será:

$$s = \int_0^2 \|\alpha'(t)\| dt =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}\sqrt{5+16t}dt = \frac{1}{2}.\frac{1}{16}.\frac{2}{3}(5+16t)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{1}{48}(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5})$$

2. La ecuación de una curva es $y^2 = x^3$. Halle la longitud del arco que une $(1,-1)$ a $(1,1)$.

Solución:



Parametrizamos la curva de la forma: $x = t^2, \quad y = t^3$, (con esta parametrización evitamos los radicales). Así:

$$\alpha(t) = (t^2, t^3), \qquad \alpha'(t) = (2t, 3t^2), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

α es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$ y además la parametrización dada recorre la curva en el sentido que se pide porque:

$$\alpha(-1) = (1, -1), \quad \alpha(0) = (0, 0), \quad \alpha(1) = (1, 1).$$
$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = |t|\sqrt{4 + 9t^2}.$$

La longitud del arco será:

$$s = \int_{-1}^{1} \|\alpha'(t)\| dt =$$
$$= \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{4 + 9t^2} dt = \int_{0}^{1} t\sqrt{4 + 9t^2} dt - \int_{-1}^{0} t\sqrt{4 + 9t^2} dt =$$
$$= \frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{3/2}\Big]_0^1 - \frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{3/2}\Big]_{-1}^0 = \frac{1}{27}(26\sqrt{13} - 16).$$

3. Calcule $\int_\alpha z$, donde α es la curva descrita por la parametrización

$$\alpha(t) = t\cos t\,\vec{\imath} + t\mathrm{sen}\, t\,\vec{\jmath} + t\,\vec{k} \qquad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Solución:

$$\alpha(t) = (t\cos t, t\mathrm{sen}\, t, t), \quad \alpha'(t) = (\cos t - t\mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, t + t\cos t, 1), \ t \in [0, 2\pi].$$

α es de clase $\mathcal{C}^1$ (α' es continua).

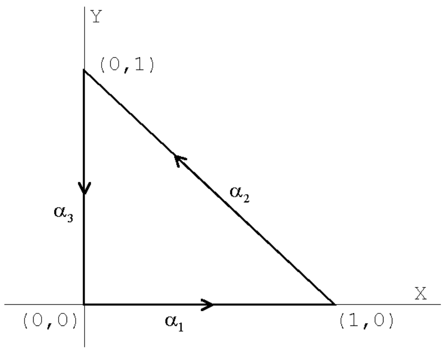
$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2 + t^2}$$

Sea $f(x, y, z) = z$. Entonces

$$\int_\alpha z = \int_0^{2\pi} f(\alpha(t)).\|\alpha'(t)\| dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{3}(2 + t^2)^{3/2}\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(2 + 4\pi^2)^3} - 2\sqrt{2}\right).$$

4. Calcule $\int_C (x+y)$, siendo C un triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

Solución:



Sea C la trayectoria del triángulo recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj. Siendo

$$\alpha_1(t) = (t,0), \quad \alpha_1'(t) = (1,0), \quad \|\alpha_1'(t)\| = 1, \quad t \in [0,1].$$

$$\alpha_2(t) = (1-t,t), \quad \alpha_2'(t) = (-1,1), \quad \|\alpha_2'(t)\| = \sqrt{2}, \quad t \in [0,1].$$

$$\alpha_3(t) = (0,1-t), \quad \alpha_3'(t) = (0,-1), \quad \|\alpha_2'(t)\| = 1, \quad t \in [0,1].$$

y puesto que

$$\alpha_1(0) = (0,0) = \alpha_3(1), \quad \alpha_1(1) = (1,0) = \alpha_2(0) \quad y \quad \alpha_2(1) = (0,1) = \alpha_3(0)$$

podemos considerar C como el arco unión $C = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$. Entonces:

$$\begin{aligned}\int_C (x+y) &= \int_{\alpha_1} (x+y) + \int_{\alpha_2} (x+y) + \int_{\alpha_3} (x+y) = \\ &= \int_0^1 t dt + \int_0^1 \sqrt{2} dt + \int_0^1 (1-t) dt = \left[\frac{t^2}{2} + \sqrt{2}t + t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \\ &= 1 + \sqrt{2}.\end{aligned}$$

5. Un alambre tiene forma de circunferencia, $x^2 + y^2 = a^2$. Determine su masa y su momento de inercia respecto de un diámetro si la densidad en un punto (x, y) del alambre está dada por la función $f(x, y) = |x| + |y|$.

Solución:

La masa del alambre viene dada por la expresión:

$$M = \int_\gamma f(x, y) = \int_\gamma |x| + |y|$$

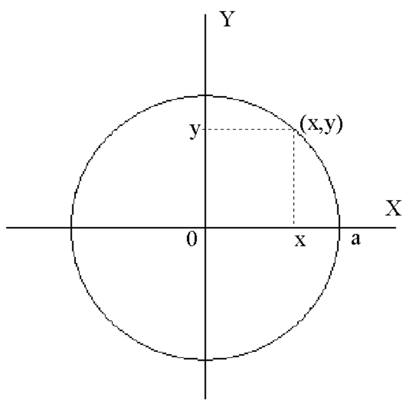
siendo γ la curva cuya trayectoria representa la forma del alambre, en este caso una circunferencia que parametrizamos por:

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\, t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

que es de clase $\mathcal{C}^1$

$$\gamma'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\, t, a\cos t) \qquad \longrightarrow \qquad \|\gamma'(t)\| = a$$

$$\begin{aligned} M = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt = \int_0^{2\pi} (|a\cos t| + |a\,\mathrm{sen}\, t|)\, a dt = \\ = a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos t + \mathrm{sen}\, t)dt + a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos t + \mathrm{sen}\, t)dt + \\ + a^2 \int_\pi^{3\pi/2} (-\cos t - \mathrm{sen}\, t)dt + a^2 \int_{3\pi/2}^{2\pi} (\cos t - \mathrm{sen}\, t)dt = \\ = a^2 \left[\mathrm{sen}\, t - \cos t\right]_0^{\pi/2} + a^2 \left[-\mathrm{sen}\, t - \cos t\right]_{\pi/2}^{\pi} + \\ + a^2 \left[-\mathrm{sen}\, t + \cos t\right]_\pi^{3\pi/2} + a^2 \left[\mathrm{sen}\, t + \cos t\right]_{3\pi/2}^{2\pi} = 8a^2. \end{aligned}$$



Para calcular el momento de inercia respecto de un diámetro necesitamos la distancia de un punto cualquiera (x, y) a dicho diámetro. Para simplificar, tomaremos como eje el eje OX, por tanto, la función que da la distancia de un punto al eje es $r(x, y) = |y|$. Teniendo en cuenta la definición (1.11) del momento de inercia respecto de un eje se tiene:

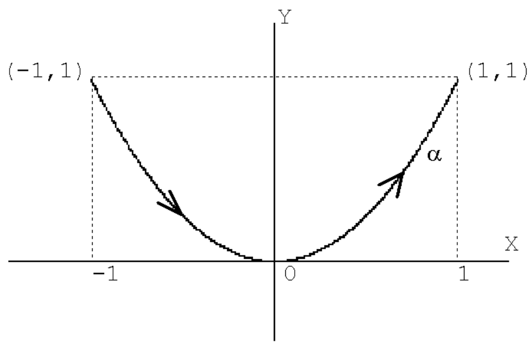
$$
\begin{aligned}
I = & \int_\gamma y^2(|x| + |y|) = \\
& = a^4 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t(|\operatorname{sen} t| + |\cos t|)dt = a^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos t dt - \\
& - a^4 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos t dt + a^4 \int_{3\pi/2}^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos t dt + a^4 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 t dt - \\
& - a^4 \int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t dt = \frac{a^4}{3}\left(\left[\operatorname{sen}^3 t\right]_0^{\pi} - \left[\operatorname{sen}^3 t\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \left[\operatorname{sen}^3 t\right]_{3\pi/2}^{2\pi} \right) + \\
& + a^4 \int_0^{\pi} \left(\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t \cos^2 t\right) dt - a^4 \int_\pi^{2\pi} \left(\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t \cos^2 t\right) dt = 4a^4.
\end{aligned}
$$

6. Calcule la integral del campo vectorial

$$F(x, y) = (x^2 - 2xy)\,\vec{\imath} + (y^2 - 2xy)\,\vec{\jmath},$$

a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ a $(1, 1)$.

Solución:



La integral curvilínea del campo F a lo largo de la parábola es

$$\int_\alpha F = \int_a^b F(\alpha(t))\alpha'(t)dt$$

siendo α una parametrización de dicha parábola. Hacemos $x = t,\ y = t^2$ para obtener la parametrización:

$$\alpha(t) = (t, t^2), \qquad t \in [-1, 1]$$

que es de clase $\mathcal{C}^1$ y va desde $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ pues $\alpha(-1) = (-1, 1)$ y $\alpha(1) = (1, 1)$. Así:

$$\alpha'(t) = (1, 2t), \qquad F(\alpha(t)) = (t^2 - 2t^3, t^4 - 2t^3)$$

$$\begin{aligned}
\int_\alpha F &= \int_{-1}^1 F(\alpha(t))\alpha'(t)dt = \\
&= \int_{-1}^1 (t^2 - 2t^3, t^4 - 2t^3).(1, 2t)dt = \int_{-1}^1 (t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4)dt = \\
&= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3} - \frac{4t^5}{5}\right]_{-1}^1 = -\frac{14}{15}
\end{aligned}$$

7. Calcule la integral curvilínea

$$\int_\gamma (x + 2)dx + 3zdy + y^2dz\,,$$

siendo γ una parametrización de la curva intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z = x - 1\,.$$

Solución:

Parametricemos la curva:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = x - 1 \end{array}\right\} \to\ x^2 + y^2 + x^2 - 2x + 1 = 1\ \to\ 2x^2 + y^2 - 2x = 0\ \to$$

$$\rightarrow\ 2(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{1/4}+\frac{y^2}{1/2}=1$$

Para que se cumpla esta condición podemos tomar el parámetro t tal que:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1/2}=\cos t,\quad \frac{y}{1/\sqrt{2}}=\text{sen}t,\quad z=x-1$$

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t,\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}t,\quad z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t$$

con $t\in[0,2\pi]$ pues de esta forma se recorre toda la curva. Así:

$$\gamma(t)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t,\frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}t,-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t),\quad t\in[0,2\pi]$$

$$\gamma'(t)=(-\frac{1}{2}\text{sen}t,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,-\frac{1}{2}\text{sen}t),\quad t\in[0,2\pi]$$

Calculamos ahora la integral:

$$\int_\gamma (x+2)dx+3zdy+y^2dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cos t)(-\frac{1}{2}\text{sen}t)+\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t(\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}\text{sen}^2t(\frac{1}{2}\text{sen}t)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\Big(-5\text{sen}t-\text{sen}t\cos t+3\sqrt{2}\cos^2 t-3\sqrt{2}\cos t-\text{sen}t(1-\cos^2 t)\Big)\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\left.\frac{\text{sen}^2t}{2}\right]_0^{2\pi}+3\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt-3\sqrt{2}\text{sen}t\Big]_0^{2\pi}-\left.\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{8}\left[t+\frac{\text{sen}2t}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi.$$

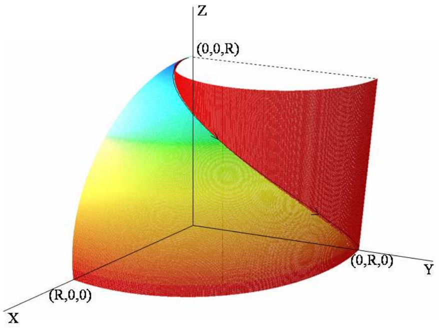
8. Calcule la integral $\int_\alpha zdy$, siendo α el arco contenido en el primer octante $(x,y,z\geq 0)$ dado por la intersección de las superficies

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2\\ x^2+y^2=Ry\end{cases}$$

El sentido de α es desde el punto $(0,0,R)$ al punto $(0,R,0)$.

Solución:

La curva es la intersección de una esfera y un cilindro:



Parametrizamos la curva

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2=Ry \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad z^2+Ry=R^2 \quad \longrightarrow \quad z=\sqrt{R^2-Ry}$$

$$x^2+y^2=Ry \quad \longrightarrow \quad x^2+(y-\frac{R}{2})^2=\frac{R^2}{4}.$$

Estas ecuaciones se cumplirán si tomamos el parámetro t tal que:

$$x=\frac{R}{2}\cos t; \quad y=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\mathrm{sen}t; \quad z=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{2}\mathrm{sen}t}=R\sqrt{\frac{1-\mathrm{sen}t}{2}}=$$

$$=R\sqrt{\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-t)}{2}}=R\sqrt{\mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})}=R\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}).$$

siendo $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ para que la curva se recorra desde $(0,0,R)$ hasta $(0,R,0)$ y sea $\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})\geq 0$. Por tanto:

$$\alpha(t)=(\frac{R}{2}\cos t,\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\mathrm{sen}t,R\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})), \quad t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

que es de clase $\mathcal{C}^1$ en el intervalo considerado. Por la expresión del integrando únicamente necesitamos calcular $\alpha_1'(t)=y'=\frac{R}{2}\cos t$. Así la integral vale

$$\int_\alpha z dy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})\,\frac{R}{2}\cos t dt=$$

$$=\frac{R^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2})+\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}-\frac{3t}{2})\right)dt=\frac{2}{3}R^2.$$

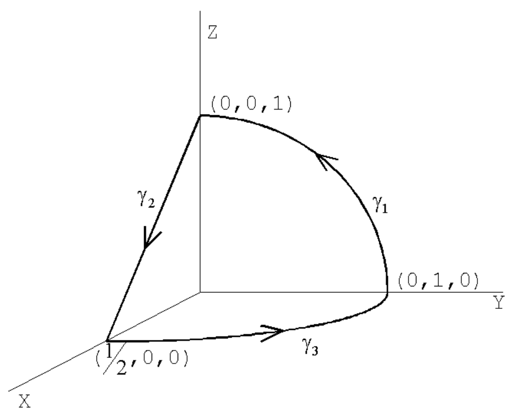
9. Calcule la integral

$$\int_{\gamma} x^2 y dx + 2y dy + x dz\,,$$

a lo largo del camino cerrado γ limitado por los arcos γ_1, γ_2 y γ_3 dados por las ecuaciones

$$\gamma_1 \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x=0 \\ y\geq 0\,,\ z\geq 0 \end{cases} \qquad \gamma_2 \begin{cases} 2x+z=1 \\ y=0 \\ x\geq 0\,,\ z\geq 0 \end{cases} \qquad \gamma_3 \begin{cases} 4x^2+y^2=1 \\ z=0 \\ x\geq 0\,,\ y\geq 0 \end{cases}$$

Solución:



Cada una de las curvas está en un plano coordenado de modo que se unen en los puntos $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y $(\frac{1}{2},0,0)$.

Las parametrizamos de la siguiente manera:

$$\gamma_1 \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x=0 \\ y\geq 0\,,\ z\geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow\ y^2+z^2=1\ \rightarrow\ x=0,\ y=\cos t,\ z=\operatorname{sen} t\ \rightarrow$$

$$\gamma_1(t)=(0,\cos t,\operatorname{sen} t), \quad t\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

γ_1 es un cuarto de circunferencia y habremos de tomar $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ para que vaya desde $(0,1,0)=\gamma_1(0)$ hasta $(0,0,1)=\gamma_1(\frac{\pi}{2})$.

$$\gamma_2 \begin{cases} 2x + z = 1 \\ y = 0 \\ x \geq 0\,,\ z \geq 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} z = 1 - 2x \\ y = 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \gamma_2(t) = (t, 0, 1 - 2t)$$

y tomaremos $t \in [0, \frac{1}{2}]$ para que vaya desde $(0,0,1) = \gamma_2(0)$ hasta $(\frac{1}{2}, 0, 0) = \gamma_2(\frac{1}{2})$.

$$\gamma_3 \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \\ x \geq 0\,,\ y \geq 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\cos t \\ y = \mathrm{sen} t \\ z = 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \gamma_3(t) = (\frac{1}{2}\cos t, \mathrm{sen} t, 0)$$

que con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ va desde $(\frac{1}{2}, 0, 0) = \gamma_3(0)$ a $(0,1,0) = \gamma_3(\frac{\pi}{2})$.
De esta manera, como

$$\gamma_1(0) = (0,1,0) = \gamma_3(\frac{\pi}{2}),\ \gamma_1(\frac{\pi}{2}) = (0,0,1) = \gamma_2(0),\ \gamma_2(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, 0, 0) = \gamma_3(0)$$

el camino γ dado es la unión de los otros tres, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ y la integral será la suma de las tres integrales siguientes:

$$\int_{\gamma_1} x^2 y dx + 2y dy + x dz = \int_0^{\pi/2} 2\cos t(-\mathrm{sen} t) dt = \cos^2 t\Big]_0^{\pi/2} = -1.$$

$$\int_{\gamma_2} x^2 y dx + 2y dy + x dz = \int_0^{1/2} t(-2) dt = -t^2\Big]_0^{1/2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} x^2 y dx + 2y dy + x dz &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}\cos^2 t \mathrm{sen} t(-\frac{1}{2}\mathrm{sen} t) + 2\mathrm{sen} t \cos t\right) dt = \\ &= -\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{sen}^2 2t}{4} dt + \left[\mathrm{sen}^2 t\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{32}\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt + 1 = \\ &= -\frac{1}{32}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\mathrm{sen} 4t\right]_0^{\pi/2} + 1 = -\frac{\pi}{128} + 1. \end{aligned}$$

Sumando los tres resultados obtenemos:

$$\int_\gamma x^2 y dx + 2y dy + x dz = -1 - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{128} + 1 = -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{128}.$$

10. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el campo vectorial

$$F(x,y,z) = (axy - z^3\,,\, (a-2)x^2\,,\, (1-a)xz^2)$$

es el gradiente de una función potencial? Para esos valores, calcule la función potencial.

Solución:

Para cualquier valor de a el campo F es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$ (convexo) y será conservativo si su rotacional es cero $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculamos el rotacional

$$rot F = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ axy - z^3 & (a-2)x^2 & (1-a)xz^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (0,\, -3z^2 - (1-a)z^2,\, 2x(a-2) - ax)\,,$$

que se anula si se cumplen las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-a)z^2 + 3z^2 = 0 \\ 2x(a-2) - ax = 0 \end{array} \right. \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{de donde} \quad a = 4\,.$$

Por tanto, para $a = 4$ el campo F es el gradiente de una función potencial y

$$\exists f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \nabla f = F = (4xy - z^3, 2x^2, -3xz^2).$$

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4xy - z^3 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2x^2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -3xz^2 \end{array} \right\}$$

Integrando la primera ecuación respecto de x y teniendo en cuenta que hay que añadir una función de las otras variables (que hace el papel de constante de integración al calcular la primitiva de F_1 respecto de x) queda:

$$f(x,y,z)=\int(4xy-z^3)dx=2x^2y-z^3x+h(y,z)$$

Para calcular la función $h(y,z)$,calculamos las derivadas parciales de f respecto de y y z y comparamos con la segunda y la tercera ecuación en el sistema anterior.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2x^2=2x^2+\frac{\partial h}{\partial y}(y,z)\quad\rightarrow\quad\frac{\partial h}{\partial y}(y,z)=0\quad\rightarrow\quad h(y,z)=k(z)\,,$$

razonando igual que antes, $k(z)$ es una función que no depende ni de x ni de y,asi:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-3xz^2=-3xz^2+\frac{\partial h}{\partial z}(y,z)=-3xz^2+k'(z)\quad\rightarrow\quad k'(z)=0$$

Luego $k(z)=C$ y la función potencial del campo F es

$$f(x,y,z)=2x^2y-z^3x+C.$$

11. Pruebe que la integral

$$\int_\gamma(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy\,,$$

es independiente del camino que une los puntos $(1,2)$ con $(3,4)$. Calcule el valor de la integral

a) parametrizando el segmento,

b) utilizando la función potencial del integrando.

Solución:

La integral será independiente del camino si el campo

$$F(x,y)=(6xy^2-y^3,6x^2y-3xy^2)$$

es conservativo. Como el campo es $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$ bastará con comprobar que se cumple la condición $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. En efecto:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

el campo es conservativo y la integral es independiente del camino.

a) Parametrizamos γ como el segmento que une el punto $(1,2)$ con $(3,4)$:

$$\gamma(t) = (1,2) + t\left((3,4) - (1,2)\right) = (1+2t, 2+2t), \quad \gamma'(t) = (2,2), \quad \forall t \in [0,1],$$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F &= \int_0^1 F(\gamma(t)).\gamma'(t)dt = \\
&= \int_0^1 \left[6(1+2t)(2+2t)^2 - (2+2t)^3\right] 2dt + \\
&+ \int_0^1 \left[6(1+2t)^2(2+2t) - 3(1+2t)(2+2t)^2\right] 2dt = \\
&= 2\int_0^1 (16 + 84t + 132t + 64t^3)dt = 2\left[16t + 42t^2 + 44t^3 + 16t^4\right]_0^1 = \\
&= 2(16 + 42 + 44 + 16) = 236
\end{aligned}$$

b) Calculamos la función $f: \quad \nabla f = F$ (función potencial del campo F):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 6xy^2 - y^3 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 6x^2y - 3xy^2
\end{aligned}\right\} \quad \to \quad f = \int (6xy^2 - y^3)dx = 3x^2y^2 - xy^3 + h(y) \quad \to$$

$$\to \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2 = 6x^2y - 3xy^2 + h'(y) \quad \to \quad h'(y) = 0 \quad \to \quad h(y) = C$$

Luego

$$f(x,y) = 3x^2y^2 - xy^3 + C$$

La integral, utilizando la función potencial, es:

$$\int_\gamma F = \int_\gamma \nabla f = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(3,4) - f(1,2) = 240 - 4 = 236.$$

12. Dado el campo de fuerzas $F(x, y) = (y^3 + 1)\,\vec{\imath} + (3xy^2 + 1)\,\vec{\jmath}$.

a) Halle el trabajo realizado al mover un objeto desde el punto $(0, 0)$ al $(2, 0)$, a lo largo de la semicircunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ con $y \geq 0$.

b) Halle el trabajo realizado al mover el objeto a lo largo de la circunferencia completa.

c) ¿Es F conservativo? Halle la función potencial de F.

Solución:

Vamos resolver primero el apartado c) porque si el campo es conservativo los otros dos apartados los resolveremos más fácilmente.

c) $F(x, y) = (y^3 + 1)\,\vec{\imath} + (3xy^2 + 1)\,\vec{\jmath}$:

$$D_1F_2(x, y) = 3y^2 = D_2F_1, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

y el campo F es conservativo. Calculemos su función potencial $f : \nabla f = F$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = y^3 + 1 \quad \rightarrow \quad f = \int (y^3 + 1)dx = xy^3 + x + h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = F_2 = 3xy^2 + 1 = 3xy^2 + h'(y) \quad \rightarrow \quad h'(y) = 1 \quad \rightarrow \quad h(y) = y + c$$

Luego $\quad f(x, y) = xy^3 + x + y + C.$

a) Como F es conservativo la integral es independiente del camino, únicamente depende de los puntos inicial y final. El trabajo realizado al mover el objeto desde $(0, 0)$ hasta $(2, 0)$ será:

$$\int_\gamma F = \int_\gamma \nabla f = f(2, 0) - f(0, 0) = 2 - 0 = 2.$$

b) A lo largo de la circunferencia completa, como es una curva cerrada, el trabajo será nulo:

$$\int_\gamma F = \int_\gamma \nabla f = 0.$$

1.6 Problemas propuestos

1. Parametrice la curva $y^2 + 2x^2 - 2Rx = 0$ $(R > 0)$.

2. Halle la velocidad, la aceleración y la rapidez de una partícula con vector de posición $r(t) = (t^2, e^t, te^t)$.

3. Una partícula inicia su movimiento en $r(0) = (1, 0, 0)$ con velocidad inicial $v(0) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Su aceleración es $a(t) = 4t\vec{i} + 6t\vec{j} + \vec{k}$. Determine su velocidad y posición en el tiempo t.

Solución: $v(t) = (2t^2 + 1)\vec{i} + (3t^2 - 1)\vec{j} + (t + 1)\vec{k}$.

$$r(t) = (\frac{2}{3}t^3 + t + 1)\vec{i} + (t^3 - t)\vec{j} + (\frac{1}{2}t^2 + t)\vec{k}.$$

4. Utilizando coordenadas polares, parametrice las siguientes curvas:

a) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

b) La lemniscata $(x^2 + y^2)^2 - 9(x^2 - y^2) = 0$

c) La porción de parábola $y^2 - 8x - 16 = 0\,,$ con $x \leq 4(1 + \sqrt{2})$.

d) La elipse $\dfrac{(x-6)^2}{81} + \dfrac{y^2}{45} = 1$.

Solución:

a) $\alpha(\theta) = (\sqrt{\text{sen}(2\theta)}\, cos\theta, \sqrt{\text{sen}(2\theta)}\,\text{sen}\theta)$, con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

b) $\alpha(\theta) = (3\sqrt{\cos 2\theta}\, cos\theta, 3\sqrt{\cos 2\theta}\,\text{sen}\theta)$, con $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

c) $\alpha(\theta) = (4\dfrac{1 + \cos\theta}{\sin^2\theta}\, cos\theta, 4\dfrac{1 + \cos\theta}{\sin^2\theta}\,\text{sen}\theta)$, con $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$.

d) $\alpha(\theta) = (\dfrac{15}{3 - \cos\theta}\, cos\theta, \dfrac{15}{3 - \cos\theta}\,\text{sen}\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$.

5. Parametrice la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $x + z = 0$ y calcule su longitud del arco.

Solución: La curva dada es una circunferencia en el plano $x + z = 0$ parametrizada por:

$$\alpha(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Longitud de la curva: 2π.

6. Halle la longitud de los siguientes arcos de curva

a) $\alpha(t) = e^{-t}\cos t\,\vec{\imath} + e^{-t}\mathrm{sen}\,t\,\vec{\jmath} + e^{-t}\,\vec{k}$ donde $0 \leq t \leq 1$.

b) $\alpha(t) = (t + \mathrm{sen}t, 1 + \cos t)$ con $t \in [0, \pi]$ (cicloide).

Solución:

a) $\sqrt{3}(1 - \frac{1}{e})$.

b) 4.

7. Calcule la longitud de la cardioide $\rho = 2a(1 + \cos\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, $a > 0$ fijo.

Solución: 16a.

8. Calcule $\int_\alpha (x^2 + y^2)$, donde α es la curva dada por

$$\alpha(t) = 2(\cos t + t\mathrm{sen}\,t)\,\vec{\imath} + 2(\mathrm{sen}\,t - t\cos t)\,\vec{\jmath} \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Solución: $16\pi^2(1 + 2\pi^2)$

9. Calcule la integral $\int_C y^2dx + xydy + xzdz$, siendo C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y = z$.

10. Calcule la integral curvilínea del campo vectorial $F(x, y, z) = (x, z, y)$ a lo largo de γ, siendo γ una parametrización de la curva intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z = x - 1\,.$$

11. Calcule la integral del campo vectorial

$$f(x,y) = (2a-y)\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath},$$

a lo largo de la cicloide parametrizada por

$$\alpha(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\,\vec{\imath} + a(1-\cos t)\,\vec{\jmath}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solución: $-2\pi a^2$.

12. Calcule la integral curvilínea

$$\int_\gamma yx^2 dx + ydy\,,$$

siendo γ una parametrización de la curva de ecuación

$$y^2 + 2x^2 - 2Rx = 0.$$

Solución: Parametrización de la curva (elipse):

$$\alpha(t) = (\frac{R}{2} + \frac{R}{2}\cos t, \frac{R}{\sqrt{2}}\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Valor de la integral: $-\dfrac{5\pi R^4}{32\sqrt{2}}$.

13. Considere un alambre uniforme (densidad constante) con forma de semicircunferencia de radio a.

a) Demuestre que el centro de gravedad está situado en el eje de simetría a una distancia $2a/\pi$ del centro.

b) Demuestre que el momento de inercia respecto del diámetro que pasa por los extremos del alambre es $\frac{1}{2}Ma^2$, siendo M la masa del alambre.

14. Halle la masa de un alambre cuya forma se puede describir como la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + z = 0$. La densidad depende del punto (x, y, z) de la forma $f(x, y, z) = |x|$.

Solución: La curva intersección es la del problema 5. Masa: $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$.

15. Considere la braquistócrona que parte del punto $P = (0, 2)$ y finaliza en $Q = (\pi, 0)$, de ecuación:

$$\alpha(t) = (t + \operatorname{sen}(t + \pi), 1 - \cos(t + \pi)), \quad t \in [0, \pi],$$

y el segmento rectiťlíneo que va de P a Q. Pruebe que si se suelta una bola que se desliza por cada curva, bajo el efecto de la gravedad, entonces llega antes la bola de la braquistócrona que la del segmento rectilíneo. Téngase en cuenta que el tiempo total, para una curva cualquiera, es la integral a lo largo de dicha curva del campo escalar

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2g(h_0 - y)}}$$

donde g es la gravedad y h_0 la altura inicial de la bola.

16. Determine en los siguientes ejemplos cuándo el campo vectorial F es el gradiente de un campo escalar. En los casos en los que F sea conservativo, halle la correspondiente función potencial.

a) $F(x, y) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$.

b) $F(x, y) = 3x^2y\,\vec{\imath} + x^3\,\vec{\jmath}$.

c) $F(x, y, z) = (10xz^3 + 1)\,\vec{\imath} - 6y^2\,\vec{\jmath} + 15x^2z^2\,\vec{k}$.

d) $F(x, y, z) = 2xy^3\,\vec{\imath} + x^2z^3\,\vec{\jmath} + 3x^2yz^2\,\vec{k}$.

Solución:

a) F es conservativo, función potencial: $f(x, y) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$.

b) F es conservativo, función potencial: $f(x, y) = x^3y + C$.

c) F es conservativo, función potencial: $f(x, y, z) = 5x^2z^3 + x - 2y^3 + C$.

d) F no es conservativo.

17. a) Halle el valor del parámetro a para que el campo vectorial

$$F(x, y, z) = (z, az^2 + 1, 10zy + x)$$

sea conservativo.

b) Para dicho valor de a obtenga una función potencial de F.

18. Consideremos el campo de fuerzas en el plano dado por

$$F(x, y) = (x + y, x - y).$$

a) Demuestre que el trabajo realizado por esa fuerza al mover una partícula siguiendo la curva $\alpha(t) = f(t)\,\vec{\imath} + g(t)\,\vec{\jmath}$, con $a \leq t \leq b$, depende únicamente de $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$, $g(b)$.

b) Halle el trabajo realizado cuando $f(a)$=1, $f(b)$=2, $g(a)$=3, $g(b)$=4.

Solución:

a) El trabajo realizado por la fuerza es

$$\frac{1}{2}[(f(b))^2 - (g(b))^2] + f(b)g(b) - \frac{1}{2}[(f(a))^2 - (g(a))^2] + f(a)g(a)$$

b) 3.

19. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$F(x, y, z) = 2xy\,\vec{\imath} + (x^2 + z)\,\vec{\jmath} + y\,\vec{k}\,,$$

al desplazar una partícula desde el origen de coordenadas hasta el punto $(2, 0, 8)$, siguiendo cualquier trayectoria α que una dichos puntos.

Solución: F es conservativo. Función potencial: $f(x, y, z) = x^2y + zy + C$. $W = 0$.

20. Considere el campo de fuerzas $F(x, y, z) = y\,\vec{\imath} + z\,\vec{\jmath} + yz\,\vec{k}$.

a) Determine si F es o no conservativo.

b) Calcule el trabajo realizado por F para desplazar una partícula a lo largo de la curva dada por la parametrización

$$\alpha(t) = \cos t\,\vec{\imath} + \operatorname{sen} t\,\vec{\jmath} + e^t\,\vec{k}\,, \quad t \in [0, \pi].$$

Solución:

a) F no es conservativo.

b) $-\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}(1 + e^{\pi}) + \dfrac{1}{5}(e^{2\pi} + 1)$.