MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA
Lisboa, 31 de Maio - 2 de Junho, 2004

SOBRE LA CONVERGENCIA DEL MÉTODO ITERATIVO DE SCHWARZ PARA SISTEMAS SINGULARES

Rafael Bru*, Francisco Pedroche† y Daniel B. Szyld‡

* Institut de Matemàtica Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València.
Camí de Vera s/n. 46022 València. Spain.
email: rbru@mat.upv.es, web: http://ttt.upv.es/~rbru

† Institut de Matemàtica Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València.
Camí de Vera s/n. 46022 València. Spain.
email: pedroche@mat.upv.es, web: http://ttt.upv.es/~pedroche

‡ Department of Mathematics
Temple University.
Philadelphia, PA 19122-6094, USA.
email: szyld@math.temple.edu, web: http://www.math.temple.edu/~szyld/

Palabras clave: Sistemas lineales, Métodos iterativos de Schwarz, Métodos por bloques, Solapamiento, M-matriz singular.

Resumen. *Los métodos iterativos de tipo Schwarz son una extensión natural de los métodos clásicos por bloques de Gauss-Seidel y Jacobi aplicados a problemas de discretización de ecuaciones diferenciales donde se ha hecho una división en subdominios solapados. Este tratamiento es útil para su paralelización. Es conocido que tanto el método aditivo como el multiplicativo de Schwarz convergen cuando A es una matriz simétrica definida positiva, una M-matriz no singular o una H-matriz (v. [6], [2], [5]). En la presente comunicación mostramos una condición suficiente para la convergencia del método aditivo de Schwarz para la solución del sistema de ecuaciones $Ax = b$ donde A es una M-matriz cuyo núcleo es de dimensión uno. Este es el caso cuando $A = I - B$ siendo B una matriz estocástica (por columnas) irreducible. Este resultado de convergencia complementa los resultados de [8] donde se muestra la convergencia del método multiplicativo de Schwarz aplicado a sistemas singulares de este tipo.*

1 INTRODUCCIÓN

Los métodos iterativos de tipo Schwarz se desarrollaron inicialmente para estimar la solución de sistemas de ecuaciones lineales que aparecían a consecuencia de la discretización de ecuaciones en derivadas parciales que gobernaban el problema bajo estudio. En tales casos las iteraciones de tipo Schwarz entran dentro de los métodos llamados de *descomposición de dominios*. La forma original del método fue definida por Schwarz en 1869 y se conoce actualmente como *método de Schwarz alternado* (véanse [9] o [10] para más detalles).

Los métodos de Schwarz pueden también ser usados como precondicionadores, aunque en este trabajo nos centramos en sus propiedades cuando se usan como métodos iterativos estacionarios asociados con un dominio físico que se ha dividido en dominios solapados. Para describir estos subdominios se introducen ciertas submatrices cuadradas A_i, $i = 1, 2, \ldots$, a partir de la matriz de coeficientes A que modela el problema. Cuando no hay solape entre los subdominios, el método aditivo de Schwarz coincide con el método de Jacobi por bloques, mientras que el multiplicativo se reduce al método iterativo de Gauss-Seidel por bloques.

Nuestro punto de partida es un sistema de ecuaciones lineales compatible de la forma

$$Ax = b, \tag{1}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es singular y x y b son vectores de $V = \mathbb{R}^n$. Con más detalle, nos centramos en el caso en que A es de rango $n-1$ y todas sus submatrices principales son M-matrices no singulares. Esto ocurre, en particular, cuando $A = I - B$ con I la matriz identidad $n \times n$ y B es una matriz estocástica por columnas (tiene todos los términos no negativos y la suma de los correspondientes a cada columna vale la unidad) e irreducible (no existe una matriz de permutación π tal que B pueda expresarse en la forma $B = \pi \begin{bmatrix} F & G \\ O & H \end{bmatrix} \pi^T$, con F y H matrices cuadradas y O una matriz nula). Se tiene entonces que B está asociada a una cadena de Markov ergódica: existe un vector v de distribución de probabilidad estacionario, o de equilibrio, al cual tiende la cadena y es independiente del estado inicial. Este vector verifica $Bv = v > 0$ y $v^Te = 1$, con $e^T = (1, 1, \ldots, 1)$.

Cuando A es simétrica y definida positiva, M matriz invertible o H-matriz las condiciones de convergencia de los métodos iterativos de tipo Schwarz son conocidas. Estas condiciones se basan en mostrar cuándo ocurre que el radio espectral de la matriz de iteración, $\rho(T)$, es menor que la unidad, y pueden expresarse en términos puramente matriciales. Este enfoque se denomina *algebraico*, en contraposición al enfoque analítico funcional clásico. Resultados recientes sobre la convergencia de los métodos iterativos de tipo Schwarz en el marco de una formulación algebraica pueden encontrarse en [6], [2] y [5].

En el presente caso, con A singular, la velocidad de convergencia viene dada en función del *factor de convergencia* $\gamma(T)$ definido como

$$\gamma(T) = max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 1\} \tag{2}$$

donde $\sigma(T)$ denota el espectro de T. Llamando $ind_\lambda(T)$ al mínimo valor de $k > 0$ tal que

$rango(T-\lambda I)^k = rango(T-\lambda I)^{k+1}$, resulta que cuando $\gamma(T) < 1$ y $ind_{\lambda=0}(I-T) = 1$ hay convergencia [7], [3].

El objetivo central del presente trabajo es indicar unas condiciones de convergencia del método aditivo de Schwarz cuando se aplica al sistema (1). Este resultado es análogo al dado para el caso multiplicativo en [8].

El trabajo tiene la estructura siguiente. En la sección 2 recordamos la formulación algebraica para el tratamiento del método aditivo de Schwarz. En la sección 3 introducimos ciertas definiciones y resultados conocidos sobre sistemas singulares. En la sección 4 damos el principal resultado y en las secciones 5 y 6 mostramos un ejemplo numérico y exponemos las conclusiones y desarrollos futuros.

2 FORMULACIÓN ALGEBRAICA DEL MÉTODO ADITIVO DE SCHWARZ

Con objeto de realizar la descripción de los bloques solapados llamemos V_i a cada uno de los subespacios de $V = \mathbb{R}^n$ de dimensión n_i, $i = 1, \ldots, p$, ($p > 1$) tal que su suma cubre todo V. Estos subspacios se intersectan de forma que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i > n$.

Necesitamos introducir operadores de restricción y de prolongación para pasar del espacio total a cada subespacio y a la inversa. En este trabajo usamos los siguientes operadores:

$$R_i = [I_i|O]\pi_i, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{3}$$

para realizar la restricción, donde I_i es la matriz identidad de orden n_i y π_i es una matriz de permutación de orden n. El operador de prolongación que usamos es precisamente R_i^T.

Necesitaremos tambien las matrices diagonales siguientes

$$E_i = R_i^T R_i, \quad i = 1, \ldots, p. \tag{4}$$

Es fácil mostrar que cada matriz E_i dada por (4) tiene elementos diagonales no nulos justamente en las columnas donde la correspondiente matriz R_i tiene un elemento no nulo. Esto es importante para la descripción de los solapes, por eso definimos los conjuntos siguientes

$$S_i = \{i_1, i_2, \ldots, i_{n_i}\}, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_{n_i} \tag{5}$$

como conjuntos cuyos índices se corresponden con los de las columnas de R_i que tienen elementos no nulos. Por ejemplo, si

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces $S_1 = \{1, 3, 4\}$.

Sea q el valor máximo de la diagonal de $\sum_{i=1}^{p} E_i$. Este valor q sirve como *medida del solape* y se cumple que

$$\sum_{i=1}^{p} E_i \leq qI; \tag{6}$$

y en las aplicaciones prácticas, donde A es de orden elevado y hay varios subdominios, se tiene que $q \ll p$.

La restricción de la matriz A a cada subespacio V_i viene dada por

$$A_i = R_i A R_i^T, \tag{7}$$

que es una permutación simétrica de una submatriz principal de A de orden n_i. Cada una de estas matrices A_i puede identificarse con un bloque solapado. Cada matriz A_i está formada por elementos de A que estan en las lineas (filas y columnas) cuyos índices pertenecen al conjunto S_i.

En este trabajo usamos matrices A_i invertibles (v. sección siguiente) y entonces las iteraciones de tipo aditivo Schwarz con amortiguamiento son de la forma

$$x^{k+1} = x^k + \theta \sum_{i=1}^{p} R_i^T A_i^{-1} R_i (b - Ax^k), \tag{8}$$

donde $0 < \theta \leq 1$ es el factor de amortiguamiento. Denominamos T_θ a la matriz de iteración de este esquema, que viene dada por

$$T_\theta = I - \theta \sum_{i=1}^{p} R_i^T A_i^{-1} R_i A = I - \theta \sum_{i=1}^{p} \bar{P}_i, \tag{9}$$

donde $\bar{P}_i = R_i^T A_i^{-1} R_i A$ es una proyección sobre V_i. El esquema iterativo adopta entonces la forma

$$x^{k+1} = T_\theta x^k + c, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

con $c = \theta \sum_{i=1}^{p} R_i^T A_i^{-1} R_i b$.

Por completitud, damos también la matriz de iteración del método multiplicativo de Schwarz, que es la siguiente

$$T_\mu = (I - \bar{P}_p)(I - \bar{P}_{p-1}) \cdots (I - \bar{P}_1) = \prod_{i=p}^{1} (I - \bar{P}_i). \tag{11}$$

Con objeto de expresar las matrices (9) y (11) de forma más práctica para nuestros propósitos, se introducen las matrices siguientes

$$A_{\neg i} = [O|I_{\neg i}]\, \pi_i\, A\, \pi_i^T\, [O|I_{\neg i}]^T, \tag{12}$$

donde $I_{\neg i}$ es la matriz identidad de orden $(n - n_i)$ y

$$M_i = \pi_i^T \begin{bmatrix} A_i & O \\ O & diag(A_{\neg i}) \end{bmatrix} \pi_i \tag{13}$$

De (4) y (13) se sigue de manera inmediata que

$$E_i M_i^{-1} = R_i^T A_i^{-1} R_i. \tag{14}$$

Usando esta igualdad, la matriz de iteración T_θ puede escribirse entonces como

$$T_\theta = I - \theta \sum_{i=1}^{p} E_i M_i^{-1} A. \tag{15}$$

Nótese que la ecuación (13) permite definir las particiones $A = M_i - N_i$, $i = 1, \ldots, p$, donde $N_i = M_i - A$. Estas son las llamadas *particiones inducidas* (por M_i) y juegan un papel importante a la hora de estudiar las propiedades de T_θ escrita en la forma (15).

3 PARTICIONES DE SISTEMAS SINGULARES

Recordemos algunas definiciones y resultados sobre particiones de una matriz A singular y sobre la convergencia de los esquemas iterativos aplicados a $Ax = b$.

Definición 1 *Una matriz T se llama convergente si existe el límite $lim_{k \longrightarrow \infty} T^k$.*

Lema 1 *Una matriz T es convergente si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes*

(1) $\rho(T) \leq 1$

(2) *si $\rho(T) = 1$ entonces $rango(I - T) = rango(I - T)^2$.*

(3) *si $\rho(T) = 1$ entonces $\lambda \in \sigma(T)$ con $|\lambda| = 1$ implica $\lambda = 1$.*

Comentarios La condición (2) es equivalente a decir que el índice del valor propio 1 en T es 1, es decir $ind_1 T = 1$. Cuando $T \geq O$, la condición (3) equivale a exigir que T tenga todos los coeficientes de la diagonal positivos (v.[1]).

Lema 2 *Sea $T \geq O$ tal que $Tv \leq \alpha v$ con $v > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $\rho(T) \leq \alpha$. Si, además $\rho(T) = \alpha$, entonces $ind_\alpha T = 1$.*

Comentarios La demostración puede encontrarse en [4]. Nótese que si se cumple que $T \geq O$, cuando $\rho(T) = 1$ este lema puede usarse para probar la condición (2) del lema 1. Para probar la convergencia se tiene que demostrar además que se cumpe la condición (3) del mismo lema, que en este caso se reduce a mostrar que la diagonal de T es positiva.

Lema 3 *Sea $A = M_i - N_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con M_i invertible. Entonces, llamando $T_i = M_i^{-1} N_i$ y $c = M_i^{-1} b$, el método iterativo $x^{k+1} = T_i x^k + c$ converge a alguna solución $x(x^0)$ de $Ax = b$, para cada x^0, si y sólo si T es convergente.*

Definición 2 *Una partición $A = M_i - N_i$ se llama* de tipo no negativo *si la matriz $M_i^{-1} N_i$ es no negativa.*

4 CONVERGENCIA DEL MÉTODO ADITIVO DE SCHWARZ

Consideremos $A = I - B$, donde B es una matriz estocástica (por columnas) e irreducible. Esto equivale a decir que B está asociada a una cadena de Markov ergódica, cumpliéndose $Bv = v$, con $v > 0$ [3]. Respecto a A, implica que A es irreducible, M-matriz singular, y todas sus submatrices principales de orden menor que n son M-matrices no singulares. Por tanto, las matrices A_i definidas por (7) son invertibles para $n_i < n$. También se verifica que las particiones $A = M_i - N_i$, $i = 1, \dots p$, con M_i dado por (13) son de tipo no negativo.

A partir de estas características y de la expresión de T_θ puede probarse el resultado central de este trabajo.

Teorema 1 *Sea $A = I - B$, donde B es una matriz estocástica por columnas e irreducible. Sea $p > 1$ un entero positivo y sean $A = M_i - N_i$, $i = 1, \dots p$, particiones de tipo no negativo. Entonces, si $\theta < 1/q$ el esquema iterativo del método aditivo de Schwarz dada por* (10) *es convergente y $T_\theta \geq 0$.*

Hay que remarcar que la condición de que las particiones sean de tipo no negativo se verifica cuando M_i viene dado por (13), de manera que la única condición fuerte que impone este teorema es que $\theta < 1/q$.

Nótese que asegurar la convergencia del método iterativo para resolver $Ax = b$ implica poder resolver $Ax = 0$ que equivale a $Bx = x$ y el hecho de que B sea una matriz estocástica de una cadena ergódica asegura que existen vectores $x > 0$ que cumplen esta ecuación. De esta manera podemos obtener una solución aproximada del vector de distribución de probabilidad estacionario de la cadena de Markov ergódica.

5 EJEMPLO

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 19/25 & -21/52 & -1/18 & -2/7 & -15/58 \\ -9/100 & 49/52 & -1/6 & -3/28 & -5/58 \\ -27/100 & -3/26 & 2/3 & -9/28 & -5/29 \\ -3/10 & -9/26 & -7/18 & 6/7 & -27/58 \\ -1/10 & -1/13 & -1/18 & -1/7 & 57/58 \end{bmatrix} \tag{16}$$

que proviene de $A = I - B$ con B una matriz estocástica por columnas e irreducible. Consideremos tres subdominios, tal que $p = 3$ y $q = 2$. Definidos por:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De donde se tiene $S_1 = \{1,3,5\}$, $S_2 = \{2,3,5\}$, $S_3 = \{1,4\}$, y las matrices A_1, A_2 y A_3 resultan

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2/3 & -5/29 & -27/100 \\ -1/18 & 57/58 & -1/10 \\ -1/18 & -15/58 & 19/25 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2/3 & -5/29 & -3/26 \\ -1/18 & 57/58 & -1/13 \\ -1/6 & -5/58 & 49/52 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 6/7 & -3/10 \\ -2/7 & 19/25 \end{bmatrix}.$$

Con objeto de ilustrar la estructura de M_i mostramos M_1 que resulta ser

$$M_1 = \begin{bmatrix} 19/25 & 0 & -1/18 & 0 & -15/58 \\ 0 & 49/52 & 0 & 0 & 0 \\ -27/100 & 0 & 2/3 & 0 & -5/29 \\ 0 & 0 & 0 & 6/7 & 0 \\ -1/10 & 0 & -1/18 & 0 & 57/58 \end{bmatrix}$$

Mostramos también el producto $M_1^{-1}N_1$, que es no negativo y cuya diagonal es nula

$$M_1^{-1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 38365/61594 & 0 & 8500/16583 & 0 \\ 117/1225 & 0 & 26/147 & 39/343 & 130/1421 \\ 0 & 577539/1231880 & 0 & 49869/66332 & 0 \\ 7/20 & 21/52 & 49/108 & 0 & 63/116 \\ 0 & 207147/1231880 & 0 & 15921/66332 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $\theta = 0.3$ la matriz de iteración del esquema aditivo de Schwarz resulta, usando (15),

$$T_{\theta=0.3} \approx \begin{bmatrix} 0.4000 & 0.4229 & 0.0842 & 0.1538 & 0.1881 \\ 0.0578 & 0.7000 & 0 & 0.0699 & 0 \\ 0.1427 & 0.1406 & 0.4000 & 0.3975 & 0 \\ 0 & 0.2038 & 0.1656 & 0.7000 & 0.2288 \\ 0.0431 & 0.0504 & 0 & 0.1308 & 0.4000 \end{bmatrix}$$

que es no negativa de acuerdo con el teorema 1, y tiene como espectro $\sigma(T_{0.3}) \approx \{1.0000,$ $0.6634,\ 0.1557, 0.3904 \pm 0.0074i\}$, de donde $\gamma(T_{0.3}) \approx 0.6634$. En la tabla 1 mostramos los valores de $\gamma(T_\theta)$ obtenidos para distintos valores de θ. De acuerdo con el teorema 1 hay convergencia para $\theta < 1/2$. Dado que es una condición suficiente en este caso la convergencia se extiende hasta $\theta = 0.7$.

6 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

En este trabajo se ha indicado que las iteraciones de tipo aditivo Schwarz (con amortiguamiento) dadas por (10) para la solución de (1) convergen cuando $A = I - B$ siendo B una matriz asociada a una cadena de Markov ergódica y $\theta < 1/q$. Mediante un ejemplo se ha puesto de relieve que la condición de convergencia es suficiente pero no necesaria.

θ	$\gamma(T_\theta)$
0.1	0.8878
0.2	0.7756
0.3	0.6634
0.4	0.5512
0.5	0.4390
0.6	0.6885
0.7	0.9699
0.8	
0.9	
1.0	

Tabla 1. Valores de $\gamma(T_\theta)$

Con objeto de examinar hasta qué punto puede establecerse una analogía con los resultados existentes sobre particiones de sistemas con A regular, nos planteamos estudiar como trabajo inmediato la existencia de particiones del tipo $A = M_\theta - N$ de manera que se pueda expresar $T_\theta = M_\theta^{-1}N$. Asimismo estamos interesados en desarrollar comparaciones sobre la convergencia del método aditivo con el método de Jacobi por bloques y en estudiar la influencia del tipo y número de solapes entre los subdominios.

7 AGRADECIMIENTOS

Los dos primeros firmantes han recibido la ayuda estatal DGI número BFM2001-2641, y la ayuda de la Oficina de Ciència i Tecnologia de la Presidència de La Generalitat Valenciana denominada GRUPOS03/062. El tercer firmante tiene ayuda de la National Science Foundation, número DMS-0207525.

REFERENCIAS

[1] G. Alefeld y H. Schneider, On square roots of M-matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **42**, 119-132 (1982).

[2] M. Benzi, A. Frommer, R. Nabben y D.B. Szyld, Algebraic theory of multiplicative Schwarz methods, *Numerische Mathematik*, **89**, 605-639 (2001).

[3] A. Berman y R.J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, Academic Press, New York (1979). [Reprinted and updated, SIAM, Philadelphia (1994).]

[4] E. Bohl e I. Marek, A model of amplification, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **63**, 27-47 (1995).

[5] R. Bru, F. Pedroche y D.B. Szyld, Overlapping Additive and Multiplicative Schwarz Iterations for H-matrices, *Linear Algebra and its Applications*, (2004). [En prensa.]

[6] A. Frommer y D.B. Szyld, Weighted Max Norms, Splittings, and Overlapping Additive Schwarz Iterations, *Numerische Mathematik*, **83**, 259-278 (1999).

[7] I. Marek y D.B. Szyld, Comparison Theorems for the Convergence Factor of Iterative Methods for Singular Matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **316**, 67-87 (2000).

[8] I. Marek, y D.B. Szyld, Algebraic Schwarz methods for the numerical solution of Markov chains, *Linear Algebra and its Applications*, (2004). [En prensa.]

[9] A. Quarteroni y A. Valli, *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford (1999).

[10] B.F. Smith, P.E. Bjørstad y W.D. Gropp, *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge (1996).