

# Una aplicación numérica del método de McWorter y Meyers para el cálculo de bases de Jordan.

Pedroche, F.\*      Mas, J.\*      Bru, R.\*

## Resumen

En esta comunicación se presenta un método numérico para el cálculo de vectores propios generalizados basado en una modificación del método teórico de McWorter y Meyers. El método propuesto parte del conocimiento del espectro de la matriz inicial. Como aplicación numérica se calculan las bases de Jordan correspondientes a dos matrices documentadas en la literatura.

## Introducción

Uno de los problemas abiertos actualmente en el campo de los valores y vectores propios se centra en la obtención de algoritmos numéricos eficaces para el tratamiento de matrices no simétricas [8]. Los trabajos relacionados abarcan tanto los aspectos teóricos [7], [4], [2], como los numéricos [9], [6], [3], [1], incluyendo artículos de contenido pedagógico y de cálculo simbólico [5], [11].

En esta comunicación exponemos un método numérico para el cálculo de bases de Jordan que está basado en un artículo de McWorter y Meyers [12] en el que presentan un método teórico para calcular valores y vectores propios. Nuestro objetivo es mostrar que con este método pueden calcularse los vectores propios generalizados de una matriz de la cual conozcamos exactamente sus valores propios, incluyendo las multiplicidades algebraicas. Una de las características del método propuesto es la flexibilidad a la hora de iniciarlo ya que se dispone de cierta libertad para elegir los vectores iniciales *semilla* que ponen en marcha el método y que pueden cambiar el costo computacional y la precisión obtenida. La comunicación comienza con una introducción teórica para recordar resultados y establecer la notación empleada. Seguidamente exponemos brevemente las bases teóricas del método y a continuación presentamos las modificaciones introducidas y la secuencia de operaciones matriciales que conforman el método numérico propuesto. Por último, mostramos la aplicación del método a dos matrices no simétricas referenciadas en la literatura.

## Vectores propios generalizados

Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , y  $\lambda$  un valor propio de  $A$ . Un vector propio de  $A$  correspondiente a  $\lambda$  es un vector no nulo  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  tal que:

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{o}. \quad (1)$$

Siguiendo a [10] diremos que un *vector propio generalizado de orden  $r$*  de  $A$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , correspondiente a  $\lambda$ , es cualquier vector no nulo  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  que verifica:

$$(A - \lambda I)^r \mathbf{x} = \mathbf{o}, \quad (A - \lambda I)^{r-1} \mathbf{x} \neq \mathbf{o}. \quad (2)$$

Se define el *subespacio propio generalizado de orden  $r$*  de  $A$ , correspondiente a  $\lambda$ , como  $\mathcal{N}_r = Nuc(A - \lambda I)^r$ . Se cumple, fijado  $\lambda$ , que existe un entero positivo  $k(\lambda)$ , llamado índice de  $\lambda$  en  $A$ , tal que:

$$\mathbf{o} = \mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2 \subset \dots \subset \mathcal{N}_k = \mathcal{N}_{k+1} = \dots = \mathcal{S}_\lambda(A) \quad (3)$$

donde  $\mathcal{S}_\lambda(A)$  se llama *subespacio propio generalizado* o *subespacio raíz* de  $A$  correspondiente a  $\lambda$ .

**Cadenas de Jordan.** Diremos que una secuencia de vectores  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_h)$  es una *cadena de Jordan de longitud  $h$*  de  $A$  correspondiente a  $\lambda$  si  $\mathbf{x}_1$  es un vector no nulo de  $\mathcal{N}_1(\lambda)$  y

$$(A - \lambda I)\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}, \quad i = 2, \dots, h \quad (4)$$

Nótese que el primer vector de una cadena de Jordan es un vector propio y los siguientes vectores son vectores propios generalizados de grados 2, 3, hasta  $h$ . Es fácil demostrar que los vectores de una cadena de Jordan forman un sistema linealmente independiente. Además:  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{N}_i$ ,  $\mathbf{x}_i \notin \mathcal{N}_{i-1}$ .

**Base de Jordan.** Supongamos que  $A$  tiene  $q$  valores propios diferentes  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ , de multiplicidades algebraicas  $ma(\lambda_i)$ , y llamemos:

$$n_j(\lambda_i) = \dim \mathcal{N}_j(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, q. \quad (5)$$

Nótese que  $n_1(\lambda)$  es la *multiplicidad geométrica* de  $\lambda$ . Si  $n_1(\lambda_i) > 1$  para algún  $\lambda_i$  se dice que  $A$  es *derogatoria*. Cada cadena dada por la ecuación (4) puede expresarse en forma matricial como  $AX_j = X_j J_j$ , donde  $X_j = (\mathbf{x}_1^j, \dots, \mathbf{x}_{h_j}^j)$ ,  $j = 1, \dots, p$ ,  $h_j$  es la longitud de la cadena  $j$ ,  $p$  es el número de cadenas o bloques de Jordan,

$$J_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{j \times j} \quad (6)$$

y podremos formar la matriz invertible  $X$  con los vectores de las  $p$  cadenas de Jordan:  $X = (X_1 | \dots | X_p)$ ,  $p = \sum_{i=1}^q n_1(\lambda_i)$  de forma que:  $A = X J X^{-1}$ , con

$$J = \text{diag}(J_j), \quad j = 1, \dots, p, \quad (7)$$

la *forma canónica de Jordan* o *reducida de Jordan* de  $A$ . Las columnas de  $X$  se dice que forman una *base canónica de Jordan* o *base de Jordan* de  $A$ . Nótese que el número de cadenas de Jordan necesarias coincide con el número de bloques de Jordan en  $J$ . Si  $ma(\lambda_i) = n_1(\lambda_i), \forall i = 1, 2, \dots, q$ , entonces  $J$  es una matriz diagonal y  $A$  se dice que es *diagonalizable*. En otro caso, se dice que  $A$  es *defectiva*.

A un valor propio  $\lambda$  le pueden corresponder diversas cadenas de Jordan. Llamando  $t_i(\lambda)$  al número de cadenas correspondientes de longitud  $i$ , necesarias para formar la matriz  $X$ , se cumple:

$$t_i(\lambda) = 2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}, \quad i = 1, \dots, k(\lambda). \quad (8)$$

En resumen, la estructura de Jordan de  $A$  es conocida si lo es el espectro de  $A$  y las dimensiones  $n_i, i = 1, \dots, k$  para cada valor propio diferente. Para más detalles, véase [10].

## Resumen del método de McWorter-Meyers

Mostramos los pasos del método de McWorter y Meyers que permiten calcular los subespacios propios generalizados de una matriz.

**Paso 1. Cálculo de relaciones de dependencia.** Dada  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y un vector arbitrario  $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{C}^n$  (que llamaremos *vector semilla*) se construye una secuencia de Krylov  $\{\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_1, A^2\mathbf{u}_1, \dots, A^{k_1}\mathbf{u}_1\}$  hasta que el sistema de vectores resultante sea, por vez primera, linealmente dependiente. Los vectores de la secuencia, exceptuando el último, se llaman vectores generados independientes, *vgi*, para abreviar. Al último vector se le llama vector generado dependiente, *vgd*. A continuación, se han de calcular los  $k_1$  coeficientes  $\alpha_i$  de una relación de dependencia, que denotaremos por  $\mathbf{d}_1$ , entre los  $k_1 + 1$  vectores:

$$\mathbf{d}_1 = A^{k_1}\mathbf{u}_1 + \alpha_{k_1-1}A^{k_1-1}\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_1A\mathbf{u}_1 + \alpha_0\mathbf{u}_1 = \mathbf{o} \quad (9)$$

Si  $k_1 = n$  no se necesitan más relaciones de dependencia y se va al paso siguiente del método. Si  $k_1 < n$  se introduce un nuevo vector arbitrario *semilla*  $\mathbf{u}_2$  que no sea combinación lineal de los *vgi* existentes, y se repite el proceso hasta que se consiguen  $n$  *vgi* y, en consecuencia, se tengan  $m$  relaciones de dependencia,  $\mathbf{d}_j, j = 1, \dots, m$ . Además, se cumple  $n = \sum_{j=1}^m k_j$ .

**Paso 2. Cálculo de los vectores propios generalizados de grado 1.** Para cada valor propio diferente  $\lambda_l$ , el método implica:

**2.1)** Factorización de cada una de las  $m$  relaciones de dependencia del paso 1.

**2.2)** Manipulación de las  $m$  factorizaciones para obtener una base de  $\mathcal{N}_1$ .

El paso 2.1 consiste en obtener  $m$  factorizaciones en la forma cociente-resto:

$$\mathbf{d}_j = (A - \lambda_l I)\mathbf{q}_j + \mathbf{r}_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (10)$$

donde  $\mathbf{q}_j$  es un vector combinación lineal de los *vgi* obtenidos antes de introducir el vector *semilla*  $\mathbf{u}_{j+1}$ :  $\mathbf{q}_j \in \langle \mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_1, \dots, A^{k_1-1}\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, A\mathbf{u}_j, \dots, A^{k_j-1}\mathbf{u}_j \rangle$  y  $\mathbf{r}_j$  es un vector combinación lineal de los  $j$  vectores semilla existentes.

Respecto al paso 2.2, para cada valor propio diferente  $\lambda_l$ , se ha de calcular una base de un subespacio, que llamaremos  $\mathcal{H}_1^{\lambda_l} \subset \mathbb{C}^n$ , formado por los vectores  $(c_1^1, c_2^1, \dots, c_m^1)$  que verifican:

$$\sum_{j=1}^m c_j^1 \mathbf{r}_j = \mathbf{o} \quad (11)$$

con lo cual,  $\sum_{j=1}^m c_j^1 \mathbf{q}_j \in \mathcal{N}_1(\lambda_l)$ . Haciendo lo mismo para los  $n_1$  vectores de la base de  $\mathcal{H}_1$  se obtiene una base de  $\mathcal{N}_1$ .

**Paso 3. Cálculo de los subespacios propios generalizados.** Dado un valor propio  $\lambda_l$ , el cálculo de los subespacios  $\mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_k$ , donde  $k$  es el índice de  $\lambda_l$  en  $A$ , se realiza de una manera análoga al paso 2. A continuación explicamos como se calcula  $\mathcal{N}_2$  ya que la generalización a  $\mathcal{N}_i$  es inmediata. En el supuesto que  $n_1 < ma(\lambda_l)$ , para calcular  $\mathcal{N}_2$  hay que hacer:

- 3.1) Factorización de los  $n_1$  vectores de la base de  $\mathcal{N}_1$ . Añadimos estas expresiones a las  $m$  factorizaciones que ya teníamos calculadas.
- 3.2) Manipulación de las  $m + n_1$  factorizaciones para obtener una base de  $\mathcal{N}_2$ .

La idea básica es bastante simple, en el paso 2 si conseguimos un vector  $\mathbf{x}$  no nulo que cumpla  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ , entonces es un vector de  $\mathcal{N}_1$ , y en el paso 3, si conseguimos una factorización de la forma  $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{x}$  entonces, en virtud de (4), el vector  $\mathbf{v}$  pertenece a  $\mathcal{N}_2$  pero no a  $\mathcal{N}_1$ . La justificación teórica del método se describe en [12].

## Modificación del método

McWorter y Meyers presentan el método aplicado a ejemplos sencillos, resueltos con lápiz y papel y sin entrar en el cálculo explícito de bases de Jordan. Nosotros hemos modificado el método y lo hemos sistematizado para el cálculo de los vectores propios generalizados y posteriormente, la base de Jordan, como mostramos a continuación.

**Modificación del paso 1.** Para llevar a cabo el cálculo de las  $m$  relaciones de dependencia de manera directa se construye la matriz  $n \times (m + n)$ :

$$B = (\mathbf{u}_1 | A\mathbf{u}_1 | A^2\mathbf{u}_1 | \dots | A^{k_1}\mathbf{u}_1 | \dots | \mathbf{u}_m | A\mathbf{u}_m | \dots | A^{k_m}\mathbf{u}_m) \quad (12)$$

y se calcula su núcleo  $Nuc(B)$ . Como el rango de  $B$  es  $n$ , se obtienen  $m$  vectores  $\{\mathbf{d}_1^E, \mathbf{d}_2^E, \dots, \mathbf{d}_m^E\}$ , de un espacio vectorial que llamaremos  $E$ , de dimensión  $n + m$ . Llamaremos base canónica de  $E$  a la base formal formada por los vectores columna de  $B$ . Necesitaremos las siguientes definiciones:  $\mathcal{I}_d$  como el conjunto de índices de las columnas de  $B$  correspondientes a *vgd*,  $\mathcal{I}_s$  como el conjunto de índices de las columnas de  $B$  correspondientes a *vectores semilla*, Matriz  $B_I$ , de tamaño  $n \times n$ , de rango completo, formada por las columnas de  $B$  cuyos índices no pertenecen a  $\mathcal{I}_d$ . Matriz  $U_s$ , de tamaño  $n \times m$  formada por las  $m$  columnas de  $B$  cuyos índices pertenecen a  $\mathcal{I}_s$ .

**Modificación del paso 2.** Factorizar las relaciones de dependencia en la forma de la ecuación (10) equivale a expresar estas relaciones como combinación lineal de terminos del tipo  $(A - \lambda I)\mathbf{x}$  y  $\mathbf{u}_i$ , donde  $\mathbf{x}$  es combinación lineal de  $vgi$ . Formalmente podemos construir una base y conseguir estas factorizaciones con un cambio de base. A tal fin, para cada valor propio, definimos la matriz de cambio de base  $T_\lambda$  de orden  $n + m$  diagonal por bloques, formada por  $m$  bloques del tipo:

$$T_\lambda(\mathbf{u}_i) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(k_i+1) \times (k_i+1)} \quad (13)$$

El cambio de base lo representamos como:

$$(T_\lambda | \mathbf{d}_1^E \mathbf{d}_2^E \cdots \mathbf{d}_m^E) \longrightarrow (I_{n+m} | G_1), \quad G_1 \in \mathbb{C}^{(n+m) \times m} \quad (14)$$

Definamos ahora las matrices siguientes: Matriz cuadrada  $S_1$  con las  $m$  filas de  $G_1$  cuyos índices pertenecen al conjunto de índices  $\mathcal{I}_s$ , matriz  $P_1$  de tamaño  $n \times m$ , con las  $n$  filas restantes de  $G_1$ , matriz  $P'_1$  formada a partir de  $G_1$ , haciendo cero las  $m$  filas del conjunto de índices  $\mathcal{I}_s$ , y a continuación reordenando:  $P'_1(i, j) = P_1(i + 1, j)$ ,  $P'_1(n + m, j) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m + n - 1, \forall j$ . Con estas definiciones, el cálculo de los  $\mathbf{q}_j$  y  $\mathbf{r}_j$  de la ecuación (10) se realiza con los siguientes productos matriciales:  $M_1 = B_I P_1$ , tiene como columnas los  $m$  vectores  $\mathbf{q}_j$ , y la matriz  $R_1 = U_s S_1$ , tiene como columnas los  $m$  vectores  $\mathbf{r}_j$ .

Para la realización del paso 2.2, denotando por  $H_1$  a la matriz que tiene como columnas una base de  $Nuc R_1$ , es decir  $col H_1 = Nuc R_1$ , entonces, las columnas de  $H_1$  forman base del subespacio  $\mathcal{H}_1^\lambda$  de vectores que cumplen la ecuación (11). En consecuencia, la matriz  $N_1 = M_1 H_1 \in \mathbb{C}^{n \times n_1}$  tiene como columnas una base de  $\mathcal{N}_1$ . Si  $n_1 < ma(\lambda)$  se procede al cálculo de  $\mathcal{N}_2$  (paso 3). En otro caso, se cambia de valor propio y se vuelve al paso 2.

**Modificación del paso 3.** En vez de usar las factorizaciones de los vectores propios generalizados de grados  $1, 2, \dots$  tal como se hace en [12], hemos preferido usar un mismo algoritmo para el cálculo de cada uno de estos espacios propios generalizados por simplicidad y robustez en la programación del método. En general, para  $i > 1$ , el algoritmo matricial para el cálculo de  $\mathcal{N}_i$  consiste en lo siguiente. Se definen:

$$P_{i-1}^E = \begin{cases} P'_1 \in \mathbb{C}^{(n+m) \times m} & \text{Si } i = 2 \\ (P'_1 | P'_{i-1}) \in \mathbb{C}^{(n+m) \times (m+n_{i-2})} & \text{Si } i > 2 \end{cases}, \quad N_{i-1}^E = P_{i-1}^E H_{i-1} \in \mathbb{C}^{(n+m) \times n_{i-1}} \quad (15)$$

**Cambio de base.**  $(T_\lambda | N_{i-1}^E) \longrightarrow (I_{n+m} | G_i), \quad G_i \in \mathbb{C}^{(n+m) \times n_{i-1}}$ .

**Separación de  $G_i$ .** Dando lugar a:  $S_i \in \mathbb{C}^{m \times n_{i-1}}, \quad P_i \in \mathbb{C}^{n \times n_{i-1}}, \quad P'_i \in \mathbb{C}^{(n+m) \times n_{i-1}}$ .

**Cálculo de  $\mathbf{q}_j$  y  $\mathbf{r}_j$ ,**  $j = m + 1, \dots, m + n_{i-1}$

$$M_{i1} = B_I P_i \in \mathbb{C}^{n \times n_{i-1}}, \quad R_{i1} = U_s S_i \in \mathbb{C}^{n \times n_{i-1}} \quad (16)$$

$$M_i = (M_1 | M_{i1}) \in \mathbb{C}^{n \times (m+n_{i-1})}, \quad R_i = (R_1 | R_{i1}) \in \mathbb{C}^{n \times (m+n_{i-1})} \quad (17)$$

$$\text{col } H_i = \text{Nuc } R_i \in \mathbb{C}^{(m+n_{i-1}) \times n_i}, \quad N_i = M_i H_i \in \mathbb{C}^{n \times n_i} \quad (18)$$

y la matriz  $N_i$  tiene como columnas una base de  $\mathcal{N}_i$ . Si  $n_i < ma(\lambda)$  se procede al cálculo de  $\mathcal{N}_{i+1}$ .

## Resultados

**Matriz 10 x 10.** La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -2 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -4 & 2 & -2 & 4 & -4 & 8 & -6 \\ -1 & 0 & 5 & -5 & 3 & -3 & 6 & -6 & 12 & -9 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 4 & -4 & 8 & -8 & 16 & -12 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 5 & -4 & 10 & -10 & 20 & -15 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -2 & 12 & -12 & 24 & -18 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -5 & 15 & -13 & 28 & -21 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -5 & 12 & -11 & 32 & -24 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -5 & 12 & -14 & 37 & -26 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 2 & -5 & 12 & -14 & 36 & -25 \end{pmatrix} \quad (19)$$

de espectro  $\sigma(A) = \{2, 3, 1\}$  con multiplicidades algebraicas  $\{5, 4, 1\}$  viene referenciada en diversos artículos [6], [9], [11]. Presentamos dos resultados distintos obtenidos por el método propuesto, que se diferencian en el conjunto de vectores semillas usados para la obtención de las relaciones de dependencia.

**Caso m=9.** El método más sencillo para incorporar vectores semilla es elegirlos de la base canónica de  $\mathbb{R}^{10}$ . En este caso lo hemos hecho así, usando los nueve primeros vectores, de manera que la matriz  $B$  de la ecuación (12) resulta:

$$B = (\mathbf{u}_1 | A\mathbf{u}_1 | A^2\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | A\mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3 | A\mathbf{u}_3 | \cdots | \mathbf{u}_9 | A\mathbf{u}_9) \in \mathbb{C}^{10 \times 19} \quad (20)$$

lo que conduce a  $m = 9$  relaciones de dependencia. Una vez calculados los subespacios propios, resultan cinco bloques de Jordan. Denotando  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 2$ ,  $\lambda_4 = 2$ ,  $\lambda_5 = 1$ , y siguiendo el criterio de ordenación de los bloques de Jordan dado en [7], la matriz de Jordan puede escribirse:

$$J = \text{diag} \{J_2(\lambda_1), J_2(\lambda_2), J_2(\lambda_3), J_3(\lambda_4), J_1(\lambda_5)\} \quad (21)$$

y la matriz  $X$  que contiene una base de Jordan la podemos denotar en la forma:

$$X = (x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, x_1^3, x_2^3, x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_1^5) \quad (22)$$

donde  $x_i^j$  significa un vector propio generalizado de grado  $i$  correspondiente al bloque de Jordan asociado al valor propio  $\lambda_j$ . Las cadenas las construimos desde los vectores de más alto grado, asegurando que vectores del mismo grado correspondientes a cadenas

diferentes sean linealmente independientes. En este caso hemos obtenido una matriz  $X$  que cumple:

$$\|AX - XJ\| = 1.3 \times 10^{-13}, \quad \text{cond}(X) = 261, \quad \|AX - XJ\|/\|A\| = 1.2 \times 10^{-15} \quad (23)$$

Estos resultados son comparables a los mostrados en [9], donde se ofrecen unos valores de  $\text{cond}(X) = 463$  y  $\|AX - XJ\| = 3 \times 10^{-9}$  para esta matriz test.

**Caso  $m=2$ .** En este caso hemos buscado vectores semilla que alarguen la secuencia de Krylov asociada. Hemos usado:  $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 1, 1, -1, 1, 0, 0, 0, 0)$  dando lugar a la matriz:

$$B = (\mathbf{u}_1 | A\mathbf{u}_1 | \cdots | A^6\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | A\mathbf{u}_2 | \cdots | A^4\mathbf{u}_2) \in \mathbb{C}^{10 \times 12} \quad (24)$$

En este caso sólo resultan  $m = 2$  relaciones de dependencia. Como antes, se obtiene la misma estructura de Jordan, pero en este caso, la matriz  $X$  obtenida cumple  $\|AX - XJ\| = 0$ ,  $\text{cond}(X) = 7474$ , es decir, hemos obtenido una matriz  $X$  exacta, pero peor condicionada que en el caso anterior. El hecho de que sea exacta es consecuencia de que los sistemas de ecuaciones que han aparecido han podido ser resueltos de manera exacta mediante MATLAB.

**Matriz 7 x 7.** La matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & -2 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 2 & 5 & 0.5 & -2.5 & 2 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & -0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

referenciada en [1] sólo tiene el valor propio  $\lambda = -1$ , con multiplicidad algebraica  $ma(-1) = 7$ . Hemos usado como vectores semilla:  $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1, 1, 0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$ , y  $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ . Han resultado tres bloques de Jordan y una matriz  $X$  del tipo  $X = (x_1^1, x_1^2, x_2^2, x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_4^3)$ . Hemos obtenido:

$$\|AX - XJ\| = 3.6 \times 10^{-15}, \quad \text{cond}(X) = 79.2, \quad \|AX - XJ\|/\|A\| = 4.6 \times 10^{-16} \quad (26)$$

mejorando los resultados dados en [1], donde se ofrece una matriz  $X$  con un número de condición del orden de  $10^7$ .

## Conclusiones

El método numérico propuesto permite variar el tamaño de las matrices que aparecen en los cálculos y, en consecuencia, el tamaño de los sistemas de ecuaciones a resolver, variando los vectores semilla iniciales. Se han presentado dos aplicaciones donde el método ofrece resultados más precisos o mejor condicionados que otros referenciados en la literatura. Uno de nuestros objetivos a medio plazo es el estudio del comportamiento de este método numérico cuando se parte de valores propios ligeramente perturbados.

## Referencias

- [1] S. Askarpour, T.J. Owens, "Identifying the Jordan Canonical Form and Associated Non-Singular Transformation". *7 th Int. Coll. on Differential Equations*, D.Bainov (Ed), pp.1-7, 1997.
- [2] L. Baribeau, S. Roy, "Caractérisation spectrale de la forme de Jordan", *Linear Algebra and its Applications*, (320) pp. 183-191, 2000.
- [3] T. Beelen, P Van Dooren, "Computational aspects of the Jordan Canonical form", in: *Reliable numerical computation*, Cox, M.G. and Hammerling, S. (eds.) 57-72. Oxford Sci. Publ. Oxford Univ. Press, New York, 1990.
- [4] C. Boor, "On Pták's derivation of the Jordan normal form", *Linear Algebra and its Applications* (310) pp. 9-10, 2000.
- [5] A. Bujosa, R. Criado, C. Vega, "Jordan Normal Form via Elementary Transformations". *SIAM Review*, Volume 40, Number 4, pp. 947-956. 1998.
- [6] F. Chatelin, T. Braconnier, "About the qualitative computation of Jordan forms". *ZAMM. Z. angew. Math. Mech.* **74**, 2, pp. 105-113, 1994.
- [7] G.H. Golub, J.H. Wilkinson, "Ill-conditioned eigensystems and the computation of the Jordan canonical form", *SIAM Review* 18, 578-619, 1976.
- [8] G.H. Golub, H.A. Van der Vorst, "Eigenvalue Computation in the 20th Century", *SCCM-99-06, Technical Report*. Stanford University. 1999.
- [9] B. Kågström, A. Ruhe, "An algorithm for numerical computation of the Jordan canonical form of a complex matrix", *ACM Transactions on Mathematical Software*, Volume 6, Number 3, pp. 398-419, 1980.
- [10] P. Lancaster, M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices* (2n ed.) Academic Press, New York. 1985.
- [11] T.Y. Li, Z. Zhang, W. Tianjun, "Determining the Structure of the Jordan Normal Form of a Matrix by Symbolic Computation". *Linear Algebra and its Applications* (252) 1-3. pp. 221-259, 1997.
- [12] W.A. McWorter, L.F. Meyers, "Computing eigenvalues and eigenvectors without determinants", *Mathematics Magazine*, Vol 71. N. 1, pp. 24-33, 1988.

\* Departament de Matemàtica Aplicada. Universitat Politècnica de València.

{pedroche, jmasm, rbru}@mat.upv.es