Càlcul de valors i vectors propis sense usar determinants

Francesc Pedroche

Grup de Matemàtica Aplicada i Paral·lelisme
Departament de Matemàtica Aplicada
Universitat Politècnica de València

Contingut:

1. Introducció: conceptes previs.

1.1 Càlcul usual de valors i vectors propis.
Donada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$,

$$\boxed{A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}} \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ \mathbf{x} \neq \mathbf{o}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \longrightarrow \lambda_i$$

$$H_\lambda = Nuc(A - \lambda I)$$

$$mg(\lambda) = dim(H_\lambda) = n - rang(A - \lambda I)$$

$$1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$$

Si $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$, $\forall i$:

A és *diagonalitzable* o *no defectiva*:

$$A = TDT^{-1}.$$

Columnes de T: n v.propis LI, $D = diag\{\lambda_i\}$.

Si $mg(\lambda_i) < ma(\lambda_i)$, per a algun i:

A és *defectiva*: $A = TJT^{-1}$.

Columnes de T: n *v.propis generalitzats* LI, (*Base de Jordan*).
J: f.canònica de Jordan de A.

J és *suma directa* de p blocs de Jordan:

$$J_r(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}_{r\times r}$$

El polinomi característic de cada bloc s'anomena divisor elemental de A.

El nombre total de v.propis LI de A coincideix amb p.

Si A és diagonalitzable:

$$J = D$$

$$p = n \text{ blocs del tipus } J_1(\lambda)$$

A només té divisors elementals lineals.

1.2 Vectors propis generalitzats (o *vectors principals*) de grau j:

$$(A-\lambda I)^j \mathbf{x} = \mathbf{o}, \quad (A-\lambda I)^{j-1} \mathbf{x} \neq \mathbf{o}$$

Càlcul usual:

si $\mathbf{x}_1$ és v.propi de grau 1, un vector propi $\mathbf{x}_2$ de grau 2 acompleix:

$$(A-\lambda I)\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1, \quad \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\} LI$$

1.3 Subespais de Krylov

Seqüència de Krylov: $\boxed{\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b}, \cdots, A^r\mathbf{b}}$

Subespais de Krylov:

$$\langle \mathbf{b} \rangle, \langle \mathbf{b}, A\mathbf{b} \rangle, \langle \mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b} \rangle, \cdots$$

Donat $\mathbf{b}$, siga m el mínim de $r/$ una seqüència és LD. Aleshores:

$$(A^m + c_{m-1}A^{m-1} + \cdots + c_o I)\mathbf{b} = \mathbf{o}$$

$$\longrightarrow p(A)\mathbf{b} = \mathbf{o}$$

$p(A)$: polinomi mínim de $\mathbf{b}$ respecte a A.

m: grau de **b** respecte a A.

Anàlogament, considerant la seqüència:

$$I, A, \cdots, A^r,$$

Siga s el mínim de r / el conjunt de $s+1$ matrius és LD. Aleshores:

$$A^s + m_{s-1}A^{s-1} + \cdots + m_o I = O_n$$

$$\longrightarrow m(A) = O_n$$

$m(A)$: polinomi mínim de la matriu A.

És únic i divideix qualsevol altre polinomi que acomplisca $h(A) = O_n$.

S'acompleix:

- $p(A)$ divideix $m(A)$.

- $m(A)$ divideix el p.característic de A, $q(A)$.

- Si el grau de $\mathbf{b}$ respecte a $A_{n\times n}$ és n, aleshores:

$$p(A) = m(A) = q(A).$$

2. Exemple:

$$\begin{pmatrix} 6 & -16 & 16 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc|cc} \mathbf{u}_1 & A\mathbf{u}_1 & A^2\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & A\mathbf{u}_2 \\ 1 & 6 & 20 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Relació de dependència:

$$\mathbf{d}_1 = A^2\mathbf{u}_1 - 4A\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$$

$$\longrightarrow \quad (A^2 - 4A + 4I)\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$$

Polinomi associat a $\mathbf{u}_1$:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Per tant:

$$\lambda_1 = 2, \quad ma(\lambda_1) \geq 2$$

L'expressió $\mathbf{d}_1$ es pot factoritzar en la forma:

$$\mathbf{d}_1 = (A - 2I)^2 \mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$$

$\longrightarrow$ $\boxed{\mathbf{u}_1 \text{ pot ser un vpg de grau 2 associat a } \lambda = 2.}$

D'altra banda:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= (A - 2I)(A - 2I)\mathbf{u}_1 \\ &= (A - 2I)(A\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_1) = \mathbf{o} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ $\boxed{A\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_1 = (4, 1, 0)^T \text{ és un vector propi associat a } \lambda = 2.}$

La segona relació de dependència és:

$$\mathbf{d}_2 = A\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_2 - 4A\mathbf{u}_1 + 8\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$$

$$\longrightarrow \quad (A - 2I)\mathbf{u}_2 - 4A\mathbf{u}_1 + 8\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$$

Polinomi associat a $\mathbf{u}_2$: $(\lambda - 2)$.

Per tant: $\lambda_1 = 2, \quad ma(\lambda_1) = 3,$

i $\mathbf{d}_2$ es pot factoritzar:

$$\mathbf{d}_2 = (A - 2I)(\mathbf{u}_2 - 4\mathbf{u}_1) = \mathbf{o}$$

$\longrightarrow$ $(\mathbf{u}_2 - 4\mathbf{u}_1) = (-4, 0, 1)^T$ és un vector propi associat a $\lambda = 2$.

Només $m = 2$ relacions de dependència, implica:

$$mg(\lambda_i) \leq 2 \longrightarrow \text{hem acabat,}$$

i $\mathbf{u}_1$ és vpg de grau 2.

Per tant: $A = TJT^{-1}$, amb:

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Divisors elementals de A: $(2-\lambda)^2$, $(2-\lambda)$.

Polinomi característic: $(2-\lambda)^3$.

Polinomi mínim: $A^2 - 4A + 4I = (A - 2I)^2$.

3. Descripció de l'algorisme

(McWorter-Meyers, *Mathematics Magazine, vol. 71, No. 1*, 1998)

1r pas. Càlcul de les relacions de dependència:

$A \in M_{n\times n}(C)$, $\mathbf{u}_1 \in C^n$ arbitrari. Fem una seqüència de Krylov i parem quan siga LD:

$$\underbrace{\underbrace{\mathbf{u}_1}_{v.llavor}, A\mathbf{u}_1, A^2\mathbf{u}_1, \cdots,}_{vgi} \underbrace{A^k\mathbf{u}_1}_{vgd}$$

Esbrinem una relació de dependència:

$$\mathbf{d}_1 = A^k\mathbf{u}_1 + \alpha_{k-1}A^{k-1}\mathbf{u}_1 + \cdots$$
$$\cdots + \alpha_1 A\mathbf{u}_1 + \alpha_o\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$$

és a dir:

$$\mathbf{d}_1 = \Big(A^k + \alpha_{k-1}A^{k-1} + \cdots$$
$$\cdots + \alpha_1 A + \alpha_o I\Big)\mathbf{u}_1 =$$
$$= p_{11}(A)\mathbf{u}_1$$

Si $k = n$, hem acabat: tenim n vgi, i $p_{11}(A)$ és el polinomi característic de A (considerant-ho mònic).

Si $k < n$, introduïm un nou vector llavor: $\mathbf{u}_2$ i construïm una nova seqüència de Krylov fins que el sistema format pels vgi anteriors i aquests siga LD:

$$\underbrace{\underbrace{\mathbf{u}_1}_{v.llavor}, A\mathbf{u}_1, \cdots, A^{k-1}\mathbf{u}_1, \underbrace{\mathbf{u}_2}_{v.llavor}, A\mathbf{u}_2, \cdots,}_{vgi} \underbrace{A^l\mathbf{u}_2}_{vgd}$$

Esbrinarem una relació de dependència:

$$\mathbf{d}_2 = \left(\beta_{k-1}A^{k-1} + \cdots + \beta_1 A + \beta_o I\right)\mathbf{u}_1 + \\ + \left(A^l + \gamma_{l-1}A^{l-1} + \cdots + \gamma_1 A + \gamma_o I\right)\mathbf{u}_2$$

$$= p_{21}(A)\mathbf{u}_1 + p_{22}(A)\mathbf{u}_2 = \mathbf{o}$$

Si $k+l=n$, hem acabat: tenim n vgi. $p_{11}p_{22}$ és el polinomi característic de A.

Si $k+l<n$, introduïm un nou vector llavor: $\mathbf{u}_3$, construïm una nova seqüència de Krylov, etc.

El càlcul de les relacions de dependència acaba quan tinguem:

$$\boxed{n \text{ vectors generats independents (vgi)}}$$

Anomenem: m el nombre d'expressions de dependència $\mathbf{d}_j$ obtingudes.

S'acompleix:

$$\boxed{m = \text{N. de v.llavors}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} n + m &= \text{N. de vectors generats (vg)} \\ &= \text{N. de vgi} + \text{N. de vgd} \end{aligned}}$$

2n pas. Càlcul dels valors propis:

Les arrels dels polinomis $p_{jj}(t)$, constitueixen l'espectre de A.

El producte dels p_{jj} coincideix amb el polinomi característic (excepte, probablement, el signe, i un factor escalar si algun dels p_{jj} no són mònics)

3r pas. Càlcul dels subespais propis:

Per a cada λ, factoritzem en la forma quocient-residu:

$$\mathbf{d}_j = (A - \lambda I)\mathbf{q}_j + \mathbf{r}_j, \qquad j = 1, \cdots, m.$$

on:

$\mathbf{q}_j$ és CL dels vgi
(obtinguts abans de $\mathbf{u}_{j+1}$)

$\mathbf{r}_j$ és CL dels j v.llavors $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_j$.

Per a cada λ calcularem una base de l'espai de les m-tuples $(c_1, c_2, \cdots, c_m)$ que acompleixen:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{r}_j = \mathbf{o}$$

i per a cada vector de la base d'aquest subespai calcularem:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{d}_j = \sum_{j=1}^{m} c_j (A - \lambda I)\mathbf{q}_j + \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{r}_j$$
$$= (A - \lambda I) \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{q}_j = \mathbf{o}$$

amb la qual cosa,

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{q}_j \quad \text{és v.propi associat a } \lambda.$$

4. Justificació de l'algorisme

Siga $A \in M_{n\times n}(K)$, amb K un *cos algebraicament tancat*.

Anomenem **expressió** una CL de vg.

Siga E l'espai vectorial format per totes les expressions: una base està formada pels vg escrits com a expressions.

S'acompleix: dim(E)$= n+m$.

Anomenem **valor d'una expressió** el resultat d'escriure una expressió com a vector de K^n.

S'anomena **expressió nul·la** aquella que val el vector zero de K^n.

Siga N el subespai d'expressions nul·les.

S'anomena **expressió flaca** aquella que només és CL de vgi.

Siga F el subespai d'expressions flaques.

S'acompleix:

$$N \oplus F = E$$

$$dim(N) = m, \qquad dim(F) = n$$

$$\mathbf{v} \quad \text{és v.propi} \quad \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{v} \in F \\ \\ (A - \lambda I)\mathbf{v} \in N \end{cases}$$

Proposició 1: El conjunt de les m expressions de dependència formen una base del subespai d'expressions nul·les.

Lema 1: Siguen $\mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_n$ els vgi considerats com a expressions i siga λ un escalar. Aleshores, les expressions:

$$(A - \lambda I)\mathbf{g}_i \quad i = 1, \cdots, n$$

són LI ja que cadascuna té un coeficient no nul corresponent a un vector generat on la resta té un zero.

Lema 2: Siguen $\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_m$ els v.llavors escrits com a expressions. Aleshores:

$$\{(A - \lambda I)\mathbf{g}_1, \cdots, (A - \lambda I)\mathbf{g}_n, \mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_m\},$$

és una base de E.

Teorema 1. Siga $\mathbf{x}_i \in F, \quad i = 1, \cdots, p$.

Aleshores:

$$\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_p\} \text{ és LI}$$

si, i solament si,

$$\Big\{(A - \lambda I)\mathbf{x}_1, \cdots, (A - \lambda I)\mathbf{x}_p\Big\} \text{ és LI}$$

El teorema 1 ens assegura que amb el procediment fet en el **3r pas** trobem tots els vectors propis LI de A.

Teorema 2. Les arrels dels polinomis p_{jj} són els valors propis de A.

Justifica el procediment del **2n pas** de l'algorisme.

5. Extensió de l'algorisme per a calcular vectors propis generalitzats.

Donat λ es defineix:

Subespai propi generalitzat d'ordre q: format pels vpg d'ordre q.

Subespai propi generalitzat: unió dels subespais pg de tots els ordres.

Extensió: Siga $\mathbf{v}$ un v.propi de grau 1:

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{o}$$

Ara busquem una factorització en la forma:

$$\mathbf{v} = (A - \lambda I)\mathbf{z}$$

Podem fer servir l'algorisme (el **3r pas**): factoritzem

$$\mathbf{v} = (A - \lambda I)\mathbf{q} + \mathbf{r}$$

i ara busquem solucions del tipus

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{r}_j + \alpha \mathbf{r} = \mathbf{o}$$

amb $\alpha \neq 0$.

Aleshores:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{r}_j + \alpha \mathbf{r} =$$

$$-(A-\lambda I)\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{q}_j + \alpha\,(\mathbf{v} - (A-\lambda I)\mathbf{q}) = \mathbf{o}$$

amb la qual cosa:

$$\alpha \mathbf{v} = (A-\lambda I)\left\{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{q}_j + \alpha \mathbf{q}\right\}$$

i, per tant:

$$\mathbf{z} = \frac{1}{\alpha}\left\{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{q}_j + \alpha \mathbf{q}\right\}$$

és un vector propi generalitzat de grau 2.

De forma anàloga es construeix tot el subespai propi generalitzat, extenent el sumatori a tots els vpg ja calculats.

6. Exemples.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrr|rr|rr} \mathbf{u}_1 & A\mathbf{u}_1 & A^2\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & A\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & A\mathbf{u}_3 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & -6 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{d}_1 = A^2\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$$

$$\mathbf{d}_2 = A\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_2 + A\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$$

$$\mathbf{d}_3 = 6A\mathbf{u}_3 - 12\mathbf{u}_3 + A\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$$

Valors propis:

$$\text{de } \mathbf{d}_1 \longrightarrow p_{11} = \lambda(\lambda-1)$$
$$\text{de } \mathbf{d}_2 \longrightarrow p_{22} = (\lambda-2)$$
$$\text{de } \mathbf{d}_3 \longrightarrow p_{33} = 6(\lambda-2)$$

Vectors propis:
Factoritzant $\mathbf{d}_1$:

$$(A-I)(A\mathbf{u}_1) = \mathbf{o}, \qquad (A-0I)(A\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1) = \mathbf{o}$$

$A\mathbf{u}_1$ és v.propi associat a $\lambda = 1$.
$A\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1$ és v.propi associat a $\lambda = 0$.

Factoritzant per a $\lambda = 2$:

$$\mathbf{d}_1 = (A-2I)(A\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1) + 2\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$$
$$\mathbf{d}_2 = (A-2I)(\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1) + \mathbf{o} = \mathbf{o}$$
$$\mathbf{d}_3 = (A-2I)(6\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_1) - 2\mathbf{u}_1 = \mathbf{o}$$

de $\mathbf{d}_2$: $(\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1)$ és v.propi.

Sumant $\mathbf{d}_1$ i $\mathbf{d}_3$:

$$6\mathbf{u}_3 + A\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_1$$

és l'altre v.propi associat a $\lambda = 2$.

7. Conclusions

- Per a càlculs fets a mà pot ser interessant ensenyar aquest mètode en classe: ens estalviem els crèdits ocupats pels determinants.

- Crítica: en fer-lo a mà, pot costar veure si els vg són LI i traure les relacions de dependència (o resolem cada vegada un sistema ... o ho fem per determinants!) : aquest n'és el preu.

- A banda de l'interés pedagògic de l'algorisme, podria fer-se servir dins d'un context numèric? Si algun dels polinomis p_{jj} és de grau 5 o major no tenim un mètode analític. Podríem intentar diversos v.llavors de manera que anem factoritzant el polinomi característic o trobant-ne divisors elementals?

- Els mètodes numèrics usen la factorització de Schur en comptes de la de Jordan perquè aquesta resulta inestable: i si fem servir vectors ortonormals (els vgi de l'algorisme)?

- Encara que apareixen potències de matrius, es redueixen a productes matriu-vector.

- Pràcticament totes les passes de l'algorisme es redueixen a resoldre sistemes lineals: es tracta de trobar coordenades en la base de E donada pel teorema 1.

- Potser existisca un grup particular de matrius per a les quals l'algorisme siga eficaç numèricament (o un grup reduït de problemes aplicats on l'algorisme siga útil). Paga la pena estudiar-ho?.