Modelado sistema 3 muelles: resumen y forma normalizada matricial

Antonio Sala

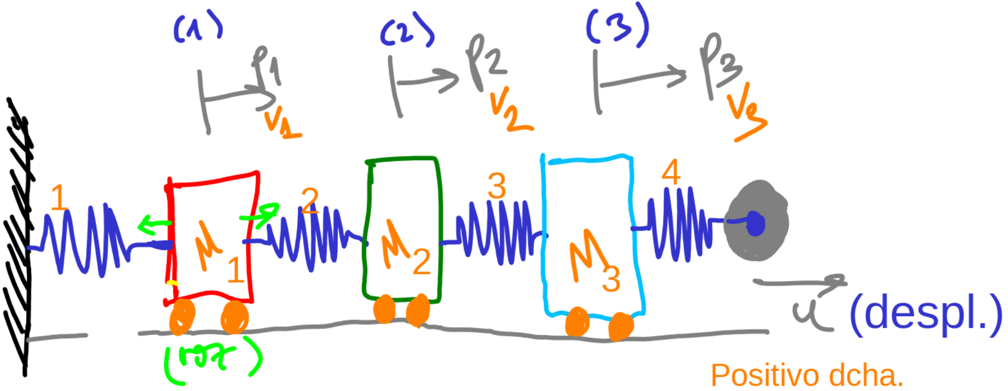
Modelado de Sistemas Físicos

DISA – ETSII – Universitat Politècnica de València

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**moll3mod2**.html

Diagrama esquemático del sistema a modelar



Modelo "variables ABSOLUTAS" (afín, lineal+constante)

Origen coords: pared fija de la izquierda, l_n. es longitud natural de muelle.

$$\frac{dP_1}{dt} = v_1$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{M_1}\left(-k_1(P_1 - l_{n1}) - bv_1 + k_2(P_2 - P_1 - l_{n2})\right)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = v_2$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{M_2}\left(-k_2(P_2 - P_1 - l_{n2}) + k_3(P_3 - P_2 - l_{n3}) - bv_2\right)$$

$$\frac{dP_3}{dt} = v_3$$

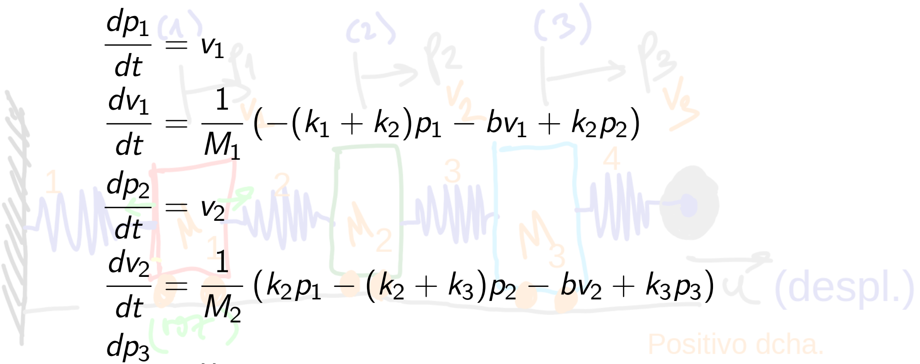
$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{M_3}\left(-k_3(P_3 - P_2 - l_{n3}) - bv_3 + k_4(U - P_3 - l_{n4})\right)$$

Modelo "variables ABSOLUTAS" : equilibrio

$$
\begin{aligned}
0 &= v_1^{eq} \\
0 &= \frac{1}{M_1}\left(-k_1(P_1^{eq} - l_{n1}) - bv_1^{eq} + k_2(P_2^{eq} - P_1^{eq} - l_{n2})\right) \\
0 &= v_2^{eq} \\
0 &= \frac{1}{M_2}\left(-k_2(P_2^{eq} - P_1^{eq} - l_{n2}) + k_3(P_3^{eq} - P_2^{eq} - l_{n3}) - bv_2^{eq}\right) \\
0 &= v_3^{eq} \\
0 &= \frac{1}{M_3}\left(-k_3(P_3^{eq} - P_2^{eq} - l_{n3}) - bv_3^{eq} + k_4(U^{eq} - P_3^{eq} - l_{n4})\right)
\end{aligned}
$$

Modelo "variables INCREMENTALES" (lineal)

Origen es pto de equilibrio de ecs. pág anterior. Desaparecen las longitudes naturales.



$$\frac{dp_1}{dt} = v_1$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{M_1}\left(-(k_1+k_2)p_1 - bv_1 + k_2 p_2\right)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = v_2$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{M_2}\left(k_2 p_1 - (k_2+k_3)p_2 - bv_2 + k_3 p_3\right)$$

$$\frac{dp_3}{dt} = v_3$$

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{M_3}\left(k_3 p_2 - (k_3+k_4)p_3 - bv_3 + k_4 u\right)$$

Modelo "variables INCREMENTALES" (lineal)

Con todos los muelles y masas iguales, que es lo que se simulará en Matlab.

$$
\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= v_1 \\
\frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{M}(-2kp_1 - bv_1 + kp_2) \\
\frac{dp_2}{dt} &= v_2 \\
\frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{M}(kp_1 - 2kp_2 - bv_2 + kp_3) \\
\frac{dp_3}{dt} &= v_3 \\
\frac{dv_3}{dt} &= \frac{1}{M}(kp_2 - 2kp_3 - bv_3 + ku)
\end{aligned}
$$

Representación Interna Normalizada (Ec. Estado)

La representación genérica normalizada $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ queda:

$$\overbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \\ p_2 \\ v_2 \\ p_3 \\ v_3 \end{pmatrix}}^{\frac{dx}{dt}} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2k}{M} & \frac{-b}{M} & \frac{k}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k}{M} & 0 & \frac{-2k}{M} & \frac{-b}{M} & \frac{k}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k}{M} & 0 & \frac{-2k}{M} & \frac{-b}{M} \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \\ p_2 \\ v_2 \\ p_3 \\ v_3 \end{pmatrix}}^{x} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{M} \end{pmatrix}}^{B} u$$

*Ec. Salida es arbitraria, depende de aplicación concreta.

Por ejemplo, $y = x$, o sea $C = I$, $D = 0$ en $y = Cx + Du$ extrae las 6 posiciones y velocidades.

El pto. de equilibrio siempre será $(x = 0, y = 0)$ ante $u = 0$ (seguimos coord. incrementales).