

Modelado sistema 3 muelles: resumen y forma normalizada matricial

Antonio Sala

Modelado de Sistemas Físicos

DISA – ETSII – Universitat Politècnica de València

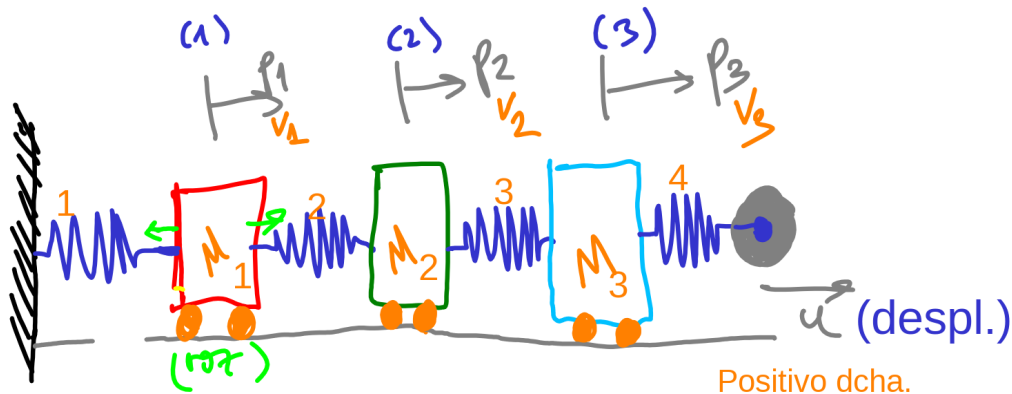
Video-presentación disponible en:

<http://personales.upv.es/asala/YT/V/moll3mod2.html>



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Diagrama esquemático del sistema a modelar



Modelo “variables ABSOLUTAS” (afín, lineal+constante)

Origen coords: pared fija de la izquierda, l_n es longitud natural de muelle.

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= v_1 \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{M_1} (-k_1(P_1 - l_{n1}) - bv_1 + k_2(P_2 - P_1 - l_{n2})) \\ \frac{dP_2}{dt} &= v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{M_2} (-k_2(P_2 - P_1 - l_{n2}) + k_3(P_3 - P_2 - l_{n3}) - bv_2) \\ \frac{dP_3}{dt} &= v_3 \\ \frac{dv_3}{dt} &= \frac{1}{M_3} (-k_3(P_3 - P_2 - l_{n3}) - bv_3 + k_4(U - P_3 - l_{n4})) \end{aligned}$$

Positivo dcha.

Modelo “variables ABSOLUTAS” : equilibrio

$$0 = v_1^{eq}$$

$$0 = \frac{1}{M_1} (-k_1(P_1^{eq} - l_{n1}) - bv_1^{eq} + k_2(P_2^{eq} - P_1^{eq} - l_{n2}))$$

$$0 = v_2^{eq}$$

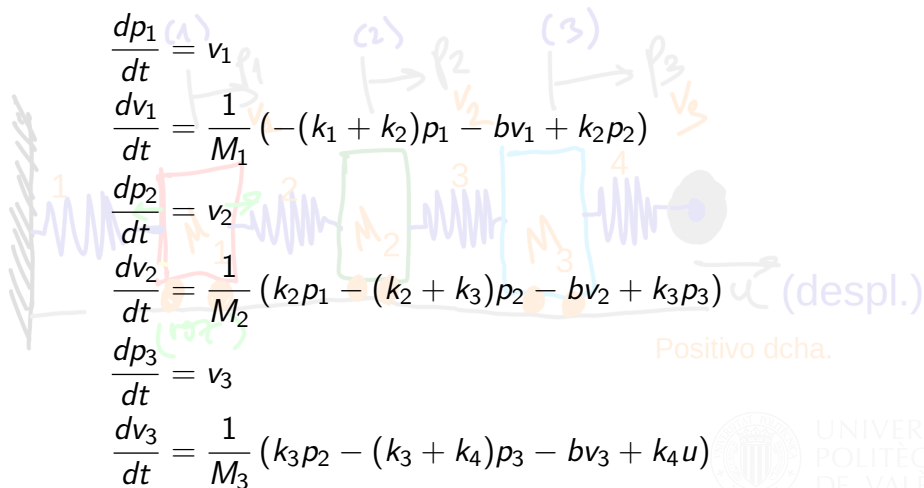
$$0 = \frac{1}{M_2} (-k_2(P_2^{eq} - P_1^{eq} - l_{n2}) + k_3(P_3^{eq} - P_2^{eq} - l_{n3}) - bv_2^{eq})$$

$$0 = v_3^{eq}$$

$$0 = \frac{1}{M_3} (-k_3(P_3^{eq} - P_2^{eq} - l_{n3}) - bv_3^{eq} + k_4(U^{eq} - P_3^{eq} - l_{n4}))$$

Modelo “variables INCREMENTALES” (lineal)

Origen es pto de equilibrio de ecs. pág anterior. Desaparecen las longitudes naturales.



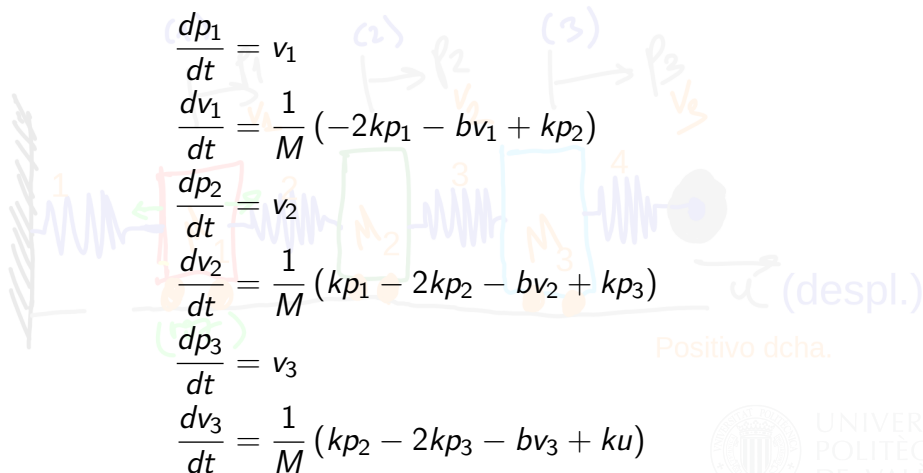
$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= v_1 \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{M_1} (-(k_1 + k_2)p_1 - bv_1 + k_2 p_2) \\ \frac{dp_2}{dt} &= v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{M_2} (k_2 p_1 - (k_2 + k_3)p_2 - bv_2 + k_3 p_3) \\ \frac{dp_3}{dt} &= v_3 \\ \frac{dv_3}{dt} &= \frac{1}{M_3} (k_3 p_2 - (k_3 + k_4)p_3 - bv_3 + k_4 u) \end{aligned}$$

(despl.)

Positivo dcha.

Modelo “variables INCREMENTALES” (lineal)

Con todos los muelles y masas iguales, que es lo que se simulará en Matlab.



The diagram shows a mechanical system with three masses, \$M_1, M_2, M_3\$, connected by four springs with stiffness \$k\$. The first mass is fixed to a wall on the left. The displacement of each mass is denoted by \$p_1, p_2, p_3\$ and its velocity by \$v_1, v_2, v_3\$. Handwritten annotations include: (1) for the first spring, (2) for the second, (3) for the third, and (4) for the fourth. A blue arrow labeled '(despl.)' points to the right, indicating the positive direction for displacement. The text 'Positivo dcha.' is written in orange below the diagram.

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= v_1 \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{M} (-2kp_1 - bv_1 + kp_2) \\ \frac{dp_2}{dt} &= v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{M} (kp_1 - 2kp_2 - bv_2 + kp_3) \\ \frac{dp_3}{dt} &= v_3 \\ \frac{dv_3}{dt} &= \frac{1}{M} (kp_2 - 2kp_3 - bv_3 + ku) \end{aligned}$$

Representación Interna Normalizada (Ec. Estado)

La representación genérica normalizada $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ queda:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\frac{dx}{dt}} \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \\ p_2 \\ v_2 \\ p_3 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2k}{M} & \frac{-b}{M} & \frac{k}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k}{M} & 0 & \frac{-2k}{M} & \frac{-b}{M} & \frac{k}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k}{M} & 0 & \frac{-2k}{M} & \frac{-b}{M} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \\ p_2 \\ v_2 \\ p_3 \\ v_3 \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{M} \end{pmatrix}}_B u$$

*Ec. Salida es arbitraria, depende de aplicación concreta.

Por ejemplo, $y = x$, o sea $C = I$, $D = 0$ en $y = Cx + Du$ extrae las 6 posiciones y velocidades.

El pto. de equilibrio siempre será $(x = 0, y = 0)$ ante $u = 0$ (seguimos coord. incrementales).