

Control por Realimentación del estado: Asignación de Polos

Antonio Sala
DISA – AI²

Universitat Politècnica de Valencia

Video-presentación disponible en <http://personales.upv.es/asala/YT/V/0Aaspolos.html>



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Motivación y objetivos

Motivación:

- Desarrollar controladores multivariables centralizados suponiendo información medida perfecta, como paso previo para soluciones más realistas.

Objetivos:

- Comprender el caso ideal de realimentación del estado, calcular ganancias de controladores.

Contenido:

- Planteamiento del problema de control centralizado, metodología, ejemplo

Introducción y planteamiento del problema

Control centralizado: un único controlador recibe todos los sensores y calcula todos los actuadores.

- **Concepto de estado:** Toda la información sobre el pasado, energía almacenada, etc. relevante para predecir el futuro.

Clasificación según información disponible:

- 1 **Realimentación del estado:** caso ideal, información completa y perfecta [full-information controller].
- 2 **Realimentación de la salida:** medidas parciales/con ruido
 - se debe filtrar el ruido de medida promediando medidas pasadas [observador].
- 3 **Control robusto:** Además de sensores imperfectos, el modelo tiene errores.



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Introducción y planteamiento del problema

Control centralizado: un único controlador recibe todos los sensores y calcula todos los actuadores.

- **Concepto de estado:** Toda la información sobre el pasado, energía almacenada, etc. relevante para predecir el futuro.

Clasificación según información disponible:

- 1 **Realimentación del estado:** caso ideal, información completa y perfecta [full-information controller].
- 2 **Realimentación de la salida:** medidas parciales/con ruido
 - se debe filtrar el ruido de medida promediando medidas pasadas [observador].
- 3 **Control robusto:** Además de sensores imperfectos, el modelo tiene errores.



Asignación de polos

Los **polos** de un sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$ son los **autovalores de A** , esto es, las raíces de la ecuación característica

$$\det(sI - A) = 0, \quad \det(zI - A) = 0$$

Prestaciones de un sistema lineal:

- Estabilidad: **parte_real**<0 (cont.), **modulo**<1 (discr.)
- Tiempo de establecimiento: **4/|parte_real|** (cont.), **4T_s/log(modulo)** (discr.)
- Oscilaciones: presencia de parte compleja.

Asignación de polos: Diseñar un **regulador** para que los **polos** de **bucle cerrado** estén en posiciones o zonas prefijadas.

- En función de transferencia: Lugar de las raíces.
- En representación interna: a continuación.

Asignación de polos

Los **polos** de un sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$ son los **autovalores de A** , esto es, las raíces de la ecuación característica

$$\det(sI - A) = 0, \quad \det(zI - A) = 0$$

Prestaciones de un sistema lineal:

- Estabilidad: **parte_real**<0 (cont.), **modulo**<1 (discr.)
- Tiempo de establecimiento: **4/|parte_real|** (cont.), **4T_s/log(modulo)** (discr.)
- Oscilaciones: presencia de parte compleja.

Asignación de polos: Diseñar un **regulador** para que los **polos** de **bucle cerrado** estén en posiciones o zonas prefijadas.

- En función de transferencia: Lugar de las raíces.
- En representación interna: a continuación.



Realimentación del estado

Objetivo: Supongamos sistema linealizado alrededor de un pto. func. cualquiera. Se pretende alcanzar $x = 0$ desde condiciones iniciales $x(0) \neq 0$ de modo estable y rápido. Se supone estado $x \in \mathbb{R}^n$ perfectamente **medible**, modelo con m entradas.

Modelo: $\dot{x} = A_{n \times n}x + B_{n \times m}u$, $x_{t+1} = A_{n \times n}x_t + B_{n \times m}u_t$

- Ley de control lineal: $u_{m \times 1} = -Kx_{n \times 1}$, $u_t = -Kx_t$
 - K es la matriz de realimentación, dimensiones $m \times n$.
 - No es necesaria entrada **referencia**: implícita en el pto. func., si es constante.
 - No es necesaria realimentación con **dinámica más compleja**. Supongamos, por ejemplo, $u = -F_p x + F_d \dot{x} = -F_p x + F_d(Ax + Bu)$, $u = \underbrace{(I - F_d B)^{-1}(-F_p + F_d A)}_K x$

- Ecuación en bucle cerrado:

$$\dot{x} = (A - BK)x, \quad x_{t+1} = (A - BK)x_t$$



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Realimentación del estado

Objetivo: Supongamos sistema linealizado alrededor de un pto. func. cualquiera. Se pretende alcanzar $x = 0$ desde condiciones iniciales $x(0) \neq 0$ de modo estable y rápido. Se supone estado $x \in \mathbb{R}^n$ perfectamente **medible**, modelo con m entradas.

Modelo: $\dot{x} = A_{n \times n}x + B_{n \times m}u$, $x_{t+1} = A_{n \times n}x_t + B_{n \times m}u_t$

- Ley de control lineal: $u_{m \times 1} = -Kx_{n \times 1}$, $u_t = -Kx_t$
 - K es la matriz de realimentación, dimensiones $m \times n$.
 - **No** es necesaria entrada **referencia**: implícita en el pto. func., si es constante.
 - **No** es necesaria realimentación con **dinámica más compleja**. Supongamos, por ejemplo, $u = -F_p x + F_d \dot{x} = -F_p x + F_d(Ax + Bu)$, $u = \underbrace{(I - F_d B)^{-1}(-F_p + F_d A)}_K x$

- Ecuación en bucle cerrado:

$$\dot{x} = (A - BK)x, \quad x_{t+1} = (A - BK)x_t$$



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Metodología de asignación de polos

- 1 Escoger unas posiciones de los polos con características de tiempo de establecimiento / amortiguamiento según especificaciones del problema $p_{des} := [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.
- 2 Construir una ecuación característica deseada $P_{des}(s) := (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_n)$
- 3 Planteando los elementos de la matriz K como incógnitas, resolver el sistema $\det(sI - (A - BK)) = P_{des}(s)$.

*Para que el sistema de ecuaciones tenga solución, necesario que el par (A, B) sea **controlable**.



Metodología de asignación de polos

- 1 Escoger unas posiciones de los polos con características de tiempo de establecimiento / amortiguamiento según especificaciones del problema $p_{des} := [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.
- 2 Construir una ecuación característica deseada $P_{des}(s) := (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_n)$
- 3 Planteando los elementos de la matriz K como incógnitas, resolver el sistema $\det(sI - (A - BK)) = P_{des}(s)$.

*Para que el sistema de ecuaciones tenga solución, necesario que el par (A, B) sea **controlable**.

*Es posible que la solución no sea única (casi siempre con múltiples actuadores): problema ¿cuál de todas elegir?.



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Metodología de asignación de polos

- 1 Escoger unas posiciones de los polos con características de tiempo de establecimiento / amortiguamiento según especificaciones del problema $p_{des} := [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.
- 2 Construir una ecuación característica deseada $P_{des}(s) := (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_n)$
- 3 Planteando los elementos de la matriz K como incógnitas, resolver el sistema $\det(sI - (A - BK)) = P_{des}(s)$.

*Para que el sistema de ecuaciones tenga solución, necesario que el par (A, B) sea **controlable**.

*Es posible que la solución **no sea única** (casi siempre con múltiples actuadores): problema ¿cuál de todas elegir?.

*Problema totalmente análogo en discreto, considerando z y posiciones de polos dentro del círculo unidad.

Metodología de asignación de polos

- 1 Escoger unas posiciones de los polos con características de tiempo de establecimiento / amortiguamiento según especificaciones del problema $p_{des} := [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.
- 2 Construir una ecuación característica deseada $P_{des}(s) := (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_n)$
- 3 Planteando los elementos de la matriz K como incógnitas, resolver el sistema $\det(sI - (A - BK)) = P_{des}(s)$.

*Para que el sistema de ecuaciones tenga solución, necesario que el par (A, B) sea **controlable**.

*Es posible que la solución **no sea única** (casi siempre con múltiples actuadores): problema ¿cuál de todas elegir?.

*Problema totalmente análogo en discreto, considerando z y posiciones de polos dentro del círculo unidad.

Ejemplo

Sea el sistema:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Consideremos realimentación del estado $u = -Kx$, siendo

$K_{1 \times 2} = -(\kappa_1 \ \kappa_2)$. El bucle cerrado es:

$$\dot{x} = A_{bc}x = (A - BK)x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\kappa_1 \ \kappa_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 - \kappa_1 & 3 - \kappa_2 \end{pmatrix} x$$

Ecuación característica:

$$0 = \det(sI - A_{bc}) = \det \left(\begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 + \kappa_1 & s - 3 + \kappa_2 \end{pmatrix} \right) = s^2 + (\kappa_2 - 3)s + (\kappa_1 + 2)$$

Tiempo establecimiento deseado: 2 segundos. $4/|\text{polo}| = 2$,

$\text{polo_deseado} = -2$. Ecuación característica deseada

$0 = (s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4$. **Solución:** $\kappa_2 - 3 = 4$, $\kappa_1 + 2 = 4$, esto es

$\Rightarrow$

$$\kappa_1 = 2, \kappa_2 = 7.$$

Discusión y Conclusiones

- Técnica algebraica relativamente sencilla para resolver problemas de control multivariable en sistemas controlables, con referencia constante ($p.f \equiv \text{ref} \equiv 0$).
- Los *polos deseados* son los parámetros de diseño ($\approx t_{est}$).
- Metodología válida tanto en sistemas continuos como discretos.
- Aplicable experimentalmente si se dispone de suficientes sensores, con poco ruido de medida.
- Inconvenientes*:
 - Puede tener soluciones múltiples o no tenerlas (no controlable).
 - No tiene en cuenta saturación de actuadores, no puede asignar tiempos de establecimiento diferentes a diferentes variables.
 - No se consideran perturbaciones, ruidos de medida, ni referencias no constantes, ni errores de modelado.

*Solventados mediante observadores, control óptimo, control con 2 grados de libertad, control robusto...