Cálculo de norma 2 de sistemas lineales

Antonio Sala

DISA-UPV

Video-presentación disponible en:
http://personales.upv.es/asala/YT/V/**norm2**.html

Preliminares

Motivación:

La norma 2 tiene interpretación física de integral ante impulso, de desviación típica. Se utiliza asíduamente en control óptimo $\mathcal{H}_2$.

Objetivos:

Comprender cómo se calcula dicha norma en un entorno determinista (integral ante impulso) y estadístico (desv. típica).

Contenido:

Revisión de conceptos: gramianos. Norma 2 como integral de respuesta impulsional. Norma 2 como desviación típica ante ruido blanco. Conclusiones.

Revisión de conceptos (I)

Gramiano de observabilidad (discreto) si A estable:

$$G^{obs} := C^T C + (CA)^T (CA) + \cdots +$$

- Norma de la salida con cond. inicial x_0:

$$x_0^T (G^{obs}) x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} y_k^T y_k = \|y\|_2^2$$

- Verifica la ecuación de **Lyapunov** discreta (matlab `dlyap`):

$$G^{obs} = A^T \cdot G^{obs} \cdot A + C^T C$$

Revisión de conceptos (II)

Gramiano de observabilidad (continuo) si A estable:

$$G^{obs} := \int_0^{\infty} (e^{At})^T C^T C e^{At}\, dt$$

- Norma de la salida con cond. inicial x_0:

$$x_0^T (G^{obs}) x_0 = \int_0^{\infty} y(t)^T y(t)\, dt = \|y\|_2^2$$

- Verifica la ecuación de **Lyapunov** (matlab `lyap`) :

$$A^T \cdot G^{obs} + G^{obs} \cdot A + C^T C = 0$$

En efecto:

$$A^T \cdot G^{obs} + G^{obs} \cdot A = \int_0^{\infty} (e^{At} A)^T C^T C e^{At} + (e^{At})^T C^T C e^{At} A\, dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{At})^T C^T C e^{At}\, dt = (e^{A\infty})^T C^T C e^{A\infty} - (e^{A0})^T C^T C e^{A0} = -C^T C$$

Norma 2

La **norma 2** de un sistema es la **norma 2 $\sqrt{\text{(integral del cuadrado)}}$ de la respuesta ante impulso** $\delta(t)$ (continuo), $\{1, 0, 0, 0 \ldots\}$ (discreto).

En multivariable, suma ante un impulso en cada entrada. En términos formales:

Sea $\mathbb{S} := ss(A, B, C, 0)$ (si $D \neq 0$ la norma 2 es infinita).

Sean $B_{[1]}, \ldots B_{[m]}$ las columnas de B.

La respuesta ante impulso en la entrada i es:

$$y_{[i]}(k) = CA^k B_{[i]} \text{ (discreto)}, \qquad y_{[i]}(t) = Ce^{At} B_{[i]} \text{ (continuo)}$$

Norma 2 (cont)

Caso discreto:

$$\|\mathbb{S}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \|y_{[i]}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} \|y_{[i]}(k)\|_2^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} B_{[i]}^T \cdot G^{obs} \cdot B_{[i]}}$$

$$= \sqrt{traza(B^T G^{obs} B)}$$

Caso continuo:

$$\|\mathbb{S}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \|y_{[i]}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\infty} \|y_{[i]}(t)\|_2^2\, dt} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} B_{[i]}^T \cdot G^{obs} \cdot B_{[i]}}$$

$$= \sqrt{traza(B^T G^{obs} B)}$$

Interpretación estadística

La **norma 2** de un sistema es la raíz cuadrada (desv. típica) de la **varianza total de la salida** (estacionaria) cuando la entrada es **ruido blanco**.

▶ Gramiano de **controlabilidad**: Matriz de varianzas covarianzas estacionaria (efecto de condiciones iniciales terminado) ante entrada ruido blanco.

- Ecuación de Lyapunov asociada:
  $G^{contr} = A \cdot G^{contr} \cdot A^T + BB^T$ (discreto),
  $A \cdot G^{contr} + G^{contr} \cdot A^T + BB^T = 0$ (continuo).

Varianzas-covarianzas de salidas si varianza del estado es G^{contr}:

$$E(yy^T) = E(Cxx^TC^T) = C \cdot E(xx^T) \cdot C^T = C \cdot G^{cont} \cdot C^T$$

Varianza total := suma de la diagonal (traza), esto es:

$$\|\mathbb{S}\|_2 = \sqrt{traza(C \cdot G^{cont} \cdot C^T)}$$

Conclusiones

- La norma 2 se calcula con los gramianos.
- Interpretación determinista, integral ante impulsos: $\|\mathbb{S}\|_2 = \sqrt{traza(B^T \cdot G^{obs} \cdot B)}$
- Interpretación estocástica, desv. típica total estacionaria ante ruido blanco: $\|\mathbb{S}\|_2 = \sqrt{traza(C \cdot G^{cont} \cdot C^T)}$
- Ambos resultados coinciden por dualidad: `obsv(A,C)=ctrb(A`^{T}`,C`^{T}`)`^{T}

$$\sqrt{traza(B^T \cdot G^{obs} \cdot B)} = \sqrt{traza(C \cdot G^{cont} \cdot C^T)}$$