Asignación de polos: cancelación de perturbaciones constantes (acción integral)

Antonio Sala Piqueras
Universitat Politecnica de Valencia

Control de Sistemas Complejos

Presentación en vídeo en:
http://personales.upv.es/asala/YT/V/drconst.html

Introducción

Motivación: Las referencias constantes, los errores en cálculo de punto de funcionamiento, causan error de posición.

Objetivo: Conocer cómo eliminar el error de posición mediante acción integral en control multivariable centralizado por asignación de polos.

Contenidos:

- Modelado, realimentación del estado, observador, conclusiones.

Motivación

- La respuesta de muchos sistemas de control es **evaluada** según puedan **cancelar perturbaciones** (o **seguir referencias**) de tipo **escalón**.
- Se deben poder diseñar controladores con **error** de **posición** **NULO**.
- Se abordará este diseño en modelos multivariable en representación interna, generalizando el concepto (en control básico monovariable) de acción integral.

Planteamiento del problema

Modelo $\dot{x} = Ax + Bu$, con salidas $y = Cx + Du$. Entrada u manipulada. Algunos componentes de $y = (z, m)$ tienen objetivos de control (z), otros son medidas disponibles (m). Particionamos C y D adecuadamente.

Además de u, hay otras entradas d aproximadamente constantes, de modo que el estado del sistema sigue

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fd$$

y la ecuación de salida (dividida en dos) es:

$$z = C_1 x + D_1 u + E_1 d$$
$$m = C_2 x + D_2 u + E_2 d$$

y, en función de transferencia,

$$\begin{pmatrix} z(s) \\ m(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{pmatrix} u(s) + \begin{pmatrix} G_{d1}(s) \\ G_{d2}(s) \end{pmatrix} d(s)$$

Ejemplos de aplicación

Se sabe que d es **constante**. Se desea cancelar su efecto sobre y, y el de condiciones iniciales no nulas en un tiempo prefijado (asignación de polos).

En algunos casos d es conocida, y en otros no (deberá ser "*estimada*").

- **Seguimiento de referencia:** $d \equiv r$ **conocida**, $F = 0$, $E_1 = -I$, $E_2 = 0$. Se desea $z = G_1(s)u(s) - r = 0$.
- **Error en punto funcionamiento:** $F = B$, $E_1 = D_1$, $E_2 = D_2$. Entonces, d se interpreta como un error "constante" en el cálculo de la entrada. Su valor es, en principio **desconocido**.
- **Deriva en sensores:** $F = 0$, $E_1 = 0$, $E_2 = I$, con d es **desconocida**.
- Casos combinados.

Perturbación constante d conocida

La idea básica es calcular un nuevo **punto de funcionamiento**.

En efecto, con $u_e = -G_1(0)^{-1} G_{d1}(0) d$, se tiene $z = 0$ en régimen permanente. Los estados se moverían a otro punto x_e, y las medidas a m_e.

En repr. interna, la solución* de

$$\begin{array}{rrcl} \text{equilibrio} & 0 & = & Ax_e + Bu_e + Fd \\ \text{objetivo de control} & 0 & = & C_1 x_e + D_1 u_e + E_1 d \\ & m_e & = & C_2 x_e + D_2 u_e + E_2 d \end{array}$$

dará el nuevo punto de equilibrio.

Ecuaciones lineales*, resulta: $x_e = Q_x d$, $u_e = Q_u d$, $m_e = Q_m d$

**Si no hay solución, minimizar por mínimos cuadrados el ajuste al objetivo de control. Si hay más de una solución, minimizar* $\|u_e\|$, *o* $\|x_e\|$.

Variables incrementales

Definiendo $\delta x = x - x_e$, $\delta u = u - u_e$, $\delta m = m - m_e$, el sistema tiene ecuaciones:

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u$$
$$z = C_1\delta x + D_1\delta u$$
$$\delta m = C_2\delta x + D_2\delta u$$

como si la perturbación no estuviera presente.

Realimentación del estado (2GL): $C_2 = I$, $D_2 = 0$.
`K=place(A,B,polos)`.

$$\delta u = -K\delta x, \quad u = -K(x - x_e) + u_e = -[\,K \quad \underbrace{-(KQ_x + Q_u)}_{K_d}\,] \begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}$$

Perturbación constante de valor desconocido

Excepto en el caso d =referencia, normalmente d es desconocido.

**También es desconocida en el caso de control con "1 grado de libertad" z=y=error=Cx-r, donde el controlador no sabe "explícitamente" la referencia.*

Para estimar su valor, se diseñará un observador.

Perturbación $d(t)$ determinista generadas linealmente: Aquéllas que verifican una ecuación de estado $\dot{\xi} = M\xi$, y de salida $d = N\xi$.

- **Constante:** $\dot{\xi} = 0 \cdot \xi$, $d = 1 \cdot \xi$.

Un sistema con polos en el origen genera una salida constante, incluso sin entrada (siempre igual a la condición inicial).

Implementación: d desconocido, no medible.

Si d es desconocido y no es directamente medible, debe **estimarse** con un **observador**. El modelo completo es:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fd, \qquad \dot{\xi} = \mathbf{0}\xi$$
$$m = C_2 x + D_2 u + E_2 d, \qquad d = I\xi$$

que se puede expresar en forma normalizada ampliada:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}}_{\frac{dx_{ext}}{dt}} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & F \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{A_{ext}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}}_{x_{ext}} + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_{ext}} \cdot u$$

$$m = \underbrace{\begin{pmatrix} C_2 & E_2 \end{pmatrix}}_{C_{ext}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}}_{x_{ext}} + Du$$

*El modelo ampliado no es controlable, pero sólo es necesario que sea observable (ver siguiente página).

ξ desconocido, continuación

Asignación de polos:

1. Si (A_{ext}, C_{ext}) observable, se diseña un observador para el modelo ampliado $L = place(A_{ext}^T, C_{ext}^T, p_{obs})^T$, que devuelve un estimado $\hat{x}_{ext} := (\hat{x}, \hat{d})^T$.
2. Se diseña una realimentación del estado para el modelo sin perturbación $K = place(A, B, p_{contr})$.
3. Se utiliza el controlador:

$$u(\hat{x}, \hat{d}) := -K(\hat{x} - Q_x\hat{d}) + Q_u\hat{d} = -\underbrace{[K \quad -(Q_u + KQ_x)]}_{K_{ext}} \cdot \hat{x}_{ext}$$

*Este controlador es una realimentación del "estado extendido". Recordad que las matrices Q_x y Q_u se calculan con C_1, D_1, E_1 (dependen de las variables z con objetivos de control).

Conclusiones

- **Cancelar errores de posición** es fundamental en control. Ello es debido al efecto de entradas constantes d.
- Si d es conocida, cancelar su efecto se reduce a **recalcular el punto de funcionamiento** manipulando la matriz de ganancia estática.
- Si d es desconocida, debe añadirse polos en cero (integradores) al modelo (generadores de constantes) y estimarse $\hat{d}$ [**modelo ampliado con integrador, observable**]. Con $\hat{d}$, se aplica la misma acción de control que si fuera conocida (*principio de separación*).

*Existen otras opciones de diseño, añadiendo integradores a la entrada o salida del proceso (**modelos ampliados controlables**), que por brevedad no se discuten aquí.