Intervalos y Elipsoides de Confianza: distribución normal multivariable

Antonio Sala Piqueras

Dept. Ing. Sistemas y Automatica (DISA)
Universitat Politècnica de València (UPV)

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**elipc**.html

Presentación

Motivación:

Con distribución normal, en caso monovariable se puede dar un intervalo en el que la mayor parte de las muestras se van a encontrar. En caso multivariable, dicho concepto debe generalizarse a una elipse (o elipsoide).

Objetivos:

Comprender los conceptos subyacentes a la determinación de intervalos y elipsoides de confianza en distribución normal mono/multi-variable

Contenidos:

Variables independientes normalizadas: distribución χ^2. Distribución normal multivariable con $\Sigma \neq I$. Ejemplo gráfico. Conclusiones.

Caso Multivariable (distr. normal estandard)

Supongamos m variables $y_1 \sim N(0,1), \ldots y_m \sim N(0,1)$ independientes, en vector $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$.

Consideremos ahora $s := y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2$. Por definición de la distribución χ^2, s es una vble. aleatoria χ^2 de m grados de libertad. El 95% de las veces estará por debajo de:

```
chi2inv(0.95,m)
```

Por lo tanto, existe un 95% de probabilidad de que $y^T y = \sum_{i=1}^m y_i^2 \leq chi2inv(0.95, m)$. Esto determina una **hiperesfera**.

Nota: la matriz de varianzas-covarianzas es identidad $E(yy^T) = I_{m\times m}$.

Distribucióрn normal multivariable

Supongamos m variables, en vector $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$, de media cero y matriz de varianzas covarianzas arbitraria $\Sigma := E(yy^T)$, con función de densidad:

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T\Sigma^{-1}\mathbf{y}\right)$$

Como Σ_y es definida positiva, consideremos la diagonalización $\Sigma = VDV^T$, con $V^{-1} = V^T$ (V ortogonal), y denotemos $S = \sqrt{D}$.

$$\Sigma = VS^2V^T, \qquad \Sigma^{-1} = VD^{-1}V^T = VS^{-2}V^T.$$

*El caso Σ_y **semi**definida positiva significa que alguna variable es una combinación lineal **determinista** de otras. Los elipsoides posteriores serían "degenerados" con eje cero, la función de densidad tendería a ser "impulsional". Detalles omitidos por simplicidad.

Cambio de variable a componentes independientes

Consideremos el cambio de variable $\boldsymbol{\nu} = S^{-1}V^T y$, $y = VS\nu$.

$$f(\boldsymbol{\nu}) = \frac{|VS|}{(2\pi)^{m/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T SV^T(\underbrace{VS^{-2}V^T}_{\Sigma^{-1}})VS\boldsymbol{\nu}\right)$$

operando, queda

$$f(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{\nu}\right) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\nu_i^2}$$

- Entonces, ν es un vector de variables $N(0,1)$ independientes.

Fórmula χ^2, resultado principal

La esfera $\nu^T\nu \leq chi2inv(\alpha, m)$ tiene una probabilidad α de contener a $s := \nu_1^2 + \cdots + \nu_m^2$.

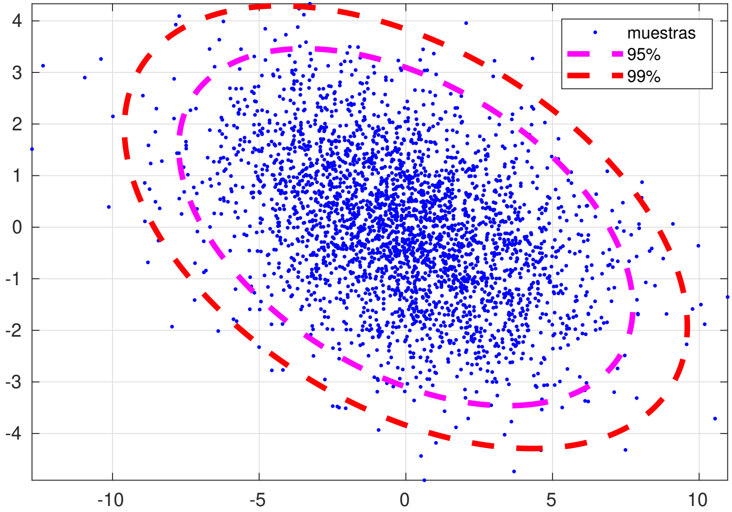
Resultado principal:

- Deshaciendo el cambio de variable, el elipsoide:

$$\mathcal{E}_\alpha := \{y \in \mathbb{R}^m : y^T V S^{-2} V^T y = y^T \Sigma^{-1} y \leq chi2inv(\alpha, m)\}$$

contendrá las muestras de y con probabilidad α.

Representación gráfica



$$\Sigma = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Conclusiones

- Basado en la distribución χ^2, se puede determinar un círculo o esfera dado un límite de probabilidad (confianza) para la suma de variables normales de media cero y desv. típ 1. (Matlab: `chi2inv`)
- Una distribución normal multivariable $y \in \mathbb{R}^m$ puede ser expresada como el escalado y giro (cambio de variable lineal) de m variables $N(0,1)$ independientes.
- La esfera de las m variables $N(0,1)$ se convierte en un **elipsoide** de confianza en las variables originales y.