

Control de procesos discretos mediante "continuización": demostración

Antonio Sala

Control de Sistemas Complejos

DISA – Universitat Politècnica de València

Presentación en vídeo en: <http://personales.upv.es/asala/YT/V/d2cp.html>



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Introducción

Motivación:

Existen muchas metodologías "analógicas" de diseño de reguladores $K_c(s)$ para un proceso continuo $G_c(s)$. Si se dispone de un modelo $G_d(z)$, ¿podrían usarse de algún modo?

Objetivos:

Comprender el uso de la transformación bilineal/Tustin **inversa** para diseñar reguladores discretos usando técnicas continuas con **garantía de estabilidad**.

Contenido:

Demostración de la preservación de la estabilidad.



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Transformación bilineal

La transformación bilineal directa/inversa:

$$s := \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \qquad z := \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}$$

1 Preserva la estabilidad:

- Al **discretizar**, dado $G_c(s)$, $G_d(z) := G_c(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1})$ estable discreto **si** $G_c(s)$ es estable,
- Al **"continuizar"** (invertir transformación): Dado $G_d(z)$, $G_c(s) := G_d(\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s})$ estable en continuo **si** $G_d(z)$ es estable.

2 Continuar y Discretizar (o viceversa) recupera la función original:

$$G_d(z) = G_c\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right) = G_d\left(\frac{1 + \frac{T}{2}\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right)}{1 - \frac{T}{2}\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right)}\right) = G_d\left(\frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)}\right) = G_d\left(\frac{2z}{2}\right) = G_d(z)$$

Diseño discreto por transformación bilineal

- 1 Dado $G_d(z)$, **supongamos** que $K_c(s)$ estabiliza en bucle cerrado a la continuización $G_c(s) := G_d\left(\frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}\right)$, esto es la función de transferencia de referencia a error en bucle cerrado (o cualquier otra FdT de bucle cerrado elegida) es **estable**:

$$S_c(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)K_c(s)}$$

- 2 Definamos $K_d(z) := K_c\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right)$.

Entonces, la función de transferencia entre referencia a error discreta

$$S_d(z) = \frac{1}{1 + G_d(z)K_d(z)}$$

es **ESTABLE**.



Demostración

Hagamos la continuización de $S_d(z)$:

$$S_c(s) := S_d\left(\frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}\right) = \frac{1}{1 + G_d\left(\frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}\right)K_d\left(\frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}\right)} = \frac{1}{1 + G_c(s)K_c(s)}$$

Con lo que, como la continuización (Tustin) de $S_d(z)$ es estable, también lo es $S_d(z)$.



Conclusiones

- Se ha demostrado que, dado $G_d(z)$, la siguiente metodología:
 - 1 Continuar G_z por Tustin.
 - 2 Diseñar un regulador continuo para el proceso resultante, que lo estabilice.
 - 3 Discretizar el regulador por Tustin.produce un regulador $K_d(z)$ que lo estabiliza.