Controlabilidad y Observabilidad

Antonio Sala

Notas de Clase: Control Multivariable, Sistemas Complejos

Estructura de la presentación

Sección 1

Introducción y Revisión de conceptos

Planteamiento del problema

Dado un sistema $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$, o $\dot{x} = Ax + Bu$ se desea:

- Calcular qué estados pueden ser "alcanzados" desde el origen con una cierta energía en u, $\|u\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} u_k^2}$ [en multivariable, $\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} u_k^T u_k}$].
  - Los estados que no puedan ser alcanzados, ¿podrían eliminarse (reducción orden)? ¿Deben modificarse los actuadores para poder alcanzarse?

Dados sensores $y = Cx$ para el sistema:

- ¿Qué estados x_0 producen más variación de la salida $\|y\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} y_k^2}$? [en multivariable, $\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} y_k^T y_k}$]
  - Los estados cuyo efecto sobre la salida sea muy pequeño ¿podrían eliminarse (reducción orden)? ¿Deben modificarse los sensores para poder observarse?

Revisión conceptos matemáticos preliminares

Para revisión más extensa, ver http://personales.upv.es/asala/videos/mgo.html

Mínimos cuadrados:

- si $x = Cu + w$, y C tiene rango completo, con más filas que columnas, el estimado de u que minimiza $e = \|x - Cu\|^2$ es $u = (C^T C)^{-1} C^T x$.
- Si $x = Cu$, con C rango completo y más columnas que filas (infinitas sol. para u), entonces $x \in col(C)$ y
$$u^* = C^T (CC^T)^{-1} x$$
es el u de minima norma $\|u\| = \sqrt{u^T u}$ que verifica $x = Cu$.

Elipsoide alcanzable con entrada acotada:

- Si $\|u\| \leq 1$, los x alcanzables son: $1 \geq u^T u = x(CC^T)^{-1} C \cdot C^T (CC^T)^{-1} x = x^T (CC^T)^{-1} x$ esto es, el elipsoide
$$\mathcal{E} := \{x : x^T (CC^T)^{-1} x \leq 1\}$$

Ejes del elipsoide: autovectores (vectores propios) de CC^T.
Longitud de los ejes: raíz cuadrada de autovalores (valores propios) de CC^T).

Revisión conceptos matemáticos preliminares (II)

Cayley-Hamilton:

- Ecuación característica de matriz M es $\det(\lambda I - M) = \lambda^n + \mu_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \mu_1\lambda + \mu_0 = 0$
- Se verifica que: $M^n + \mu_{n-1}M^{n-1} + \cdots + M\lambda + \mu_0 I = 0$.

Espacios columna y nulo

- Espacio columna de $A_{n\times m}$ Matlab: orth(A):
  $col(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\psi \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } x = A\psi\}$
- Espacio nulo de $A_{n\times m}$ Matlab: null(A):
  $null(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

Rango de matriz, espacios columna y nulo se calculan numéricamente, en bastantes casos, a partir de la descomposición en valores singulares.

http://personales.upv.es/asala/videos/svd1.html, http://personales.upv.es/asala/videos/svd2.html

Sección 2

Alcanzabilidad (controlabilidad)

Controlabilidad discreta –determinista–

Un sistema $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$, $x \in \mathbb{R}^n$, inicialmente en equilibrio, $x_0 = 0$ tiene evolución temporal:
$x_1 = Bu_0,\ \ x_2 = ABu_0 + Bu_1,\ \ x_3 = A^2Bu_0 + ABu_1 + Bu_1\ \ldots$
fórmula general:

$$x_N = A^{N-1}Bu_0 + A^{N-2}Bu_1 + \cdots + Bu_{N-1}$$

Si denominamos

$$C_N := (A^{N-1}B\ \ \ldots\ \ AB\ \ B), \quad \bar{U}_N := \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix}$$

entonces $x_N = C_N\bar{U}_N$. Se pueden alcanzar estados en **espacio columna** de C_N en N muestras, $col(C_N)$.

Controlabilidad discreta (II)

*Energía INFINITA

Matriz de controlabilidad: $\mathcal{C} := C_n = (A^{n-1}B \;\; \ldots AB \;\; B)$.

- Si $x \notin Col(\mathcal{C})$ entonces x no puede ser alcanzado **nunca**.

  *Cayley-Hamilton: el espacio columna de C_N es el mismo para todo $N \geq n$, esto es, $col(C_N) = col(\mathcal{C}) \; \forall N \geq n$, porque A^N es una combinación lineal de $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$, esto es: $A^N B$ es una combinación lineal de $\{B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\}$.

- En un sistema lineal de orden n, si x no puede ser alcanzado en n pasos, entonces no puede ser alcanzado **nunca**.

Matlab: comando `ctrb(A,B)`.

Controlabilidad discreta (III) *Energía FINITA

Elipsoide alcanzable: estados alcanzables en N pasos con $\|u\| < 1$ (tras escalado adecuado): $\{x : x^T (G_N^c)^{-1} x < 1\}$ donde $G_N^c := C_N C_N^T$

- $G_N^c := \sum_{i=0}^{N} A^i B B^T (A^i)^T$
- $G_N^c = A G_{N-1}^c A^T + B B^T$, con $G_0^c = 0$
- $col(G_N^c) = col(\mathcal{C})$ para $N \geq n$.

Haciendo $N \to \infty$ alcanzable en "todo el tiempo del mundo":

Sistema controlable: $\mathcal{C}$ de rango completo; equiv, G_∞^c invertible.

- G_∞^c se denomina **gramiano de controlabilidad**, elipsoide alcanzable (en todo el tiempo que sea necesario) con $\|u\| < 1$:

$$\mathcal{E}_c := \{x : x^T (G_\infty^c)^{-1} x < 1\}$$

- vectores propios: direcciones alcanzables principales (perpendiculares); sqrt(Valores propios) de G_∞^c tamaño ejes elipsoide (cómo de lejos se puede mover el estado en esa dirección; si muy pequeño, candidato a ser eliminado –ver: reducción de orden–).

Matlab: `Ginfc = gram(sys, 'c')`

Controlabilidad discreta (III) *Energía FINITA

Elipsoide alcanzable: estados alcanzables en N pasos con $\|u\| < 1$ (tras escalado adecuado): $\{x : x^T (G_N^c)^{-1} x < 1\}$ donde $G_N^c := C_N C_N^T$

- $G_N^c := \sum_{i=0}^N A^i B B^T (A^i)^T$
- $G_N^c = A G_{N-1}^c A^T + B B^T$, con $G_0^c = 0$
- $col(G_N^c) = col(\mathcal{C})$ para $N \geq n$.

Haciendo $N \to \infty$ alcanzable en "todo el tiempo del mundo":

Sistema controlable: $\mathcal{C}$ de rango completo; equiv, G_∞^c invertible.

- G_∞^c se denomina **gramiano de controlabilidad**, elipsoide alcanzable (en todo el tiempo que sea necesario) con $\|u\| < 1$:
$$\mathcal{E}_c := \{x : x^T (G_\infty^c)^{-1} x < 1\}$$
- vectores propios: direcciones alcanzables principales (perpendiculares); `sqrt`(Valores propios) de G_∞^c tamaño ejes elipsoide (cómo de lejos se puede mover el estado en esa dirección; si muy pequeño, candidato a ser eliminado –ver: reducción de orden–).

Matlab: `Ginfc = gram(sys, 'c')`

Controlabilidad discreta (escenario aleatorio)

*Conceptos previos de estadística en: http://personales.upv.es/asala/videos/est1.html

Sea $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$, con entrada u_k ruido blanco de varianza unidad $E(uu^T) = I_{m\times m}$, media cero, independiente de x_k.
La media del estado es cero. La varianza del estado $\Sigma_k := E(x_k x_k^T)$ tiene dinámica:
$E(x_{k+1}x_{k+1}^T) = E((Ax_k + Bu_k)(Ax_k + Bu_k)^T) =$
$E(Ax_k x_k^T A^T + Ax_k u_k^T B^T + Bu_k x_k^T A^T + Bu_k u_k^T B^T) = AE(xx^T)A^T + BB^T$
esto es:

$$\Sigma_{k+1} = A\Sigma_k A^T + BB^T$$

O sea que $\Sigma_k \equiv G_k^c$, y $\Sigma_\infty \equiv G_\infty^c$

Gramiano de controlabilidad = matriz de varianzas-covarianzas del estado estacionario ($k \to \infty$) cuando entrada es ruido blanco vza 1.

Elipsoide de confianza del estado

A partir de:

Gramiano de controlabilidad $=$ matriz de varianzas-covarianzas del estado estacionario ($k \to \infty$) cuando entrada es ruido blanco vza 1.

podemos analizar el significado del gramiano para generar un "elipsoide de confianza":

- Valores-vectores propios, componentes principales independientes y su varianza.
- De la distribución χ^2 (suma de cuadrados de distr. normal), si $u \equiv \mathcal{N}(0, I)$, existe un 95% de probabilidad de que el estado esté, en un instante dado, en el elipsoide una vez alcanzado el régimen estacionario

$$\mathcal{E}_{95\%} := \{x : x^T (G_\infty^c)^{-1} x \le chi2inv(0.95, n)\}$$

siendo n el orden del sistema.

El comando `chi2inv(p,n)` devuelve el valor de la χ^2 tal que la suma de n variables normales estandar $\mathcal{N}(0, 1)$ está por debajo de él con probabilidad p.

Sección 3

Observabilidad

Observabilida discreta (determinista)

Sea sistema $x_{k+1} = Ax_k$, $x \in \mathbb{R}^n$, con ec. salida $y = Cx$, $y \in \mathbb{R}^q$.
La evolución del sistema es $y_0 = Cx_0$, $y_1 = Cx_1 = CAx_0$,
$y_2 = Cx_2 = CA^2x_2, \ldots y_N = CA^Nx_0$.
Si denominamos

$$O_N := \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{pmatrix} \qquad \bar{Y}_N := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

entonces $\bar{Y}_N = O_N x_0$. O_N tiene dimensiones $(Nq) \times n$.

Si x_0 está en el espacio **nulo** de O_N, su valor no tiene efecto en los sensores ($O_N x_0 = 0$).

Observabilidad discreta (II)

Estimación del estado a partir de medidas:
$x_0 = (O_N^T O_N)^{-1} O_N^T \bar{Y}_N$.

Se puede obtener x_0 a partir de N medidas de los sensores si $O_N^T O_N$ (de tamaño $n \times n$) es invertible (rango $O_N = n$).

Matriz de observabilidad $\mathcal{O} := O_n$. Un par (A, C) es **observable** si $\mathcal{O}$ es de rango n.

*Cayley-Hamilton: si no se puede recuperar x_0 con $N = n$ muestras, no se puede tampoco con más.

- Si $x \in null(\mathcal{O})$ el estado no produce lectura $\neq 0$ en sensores, se dice que ese estado es **NO observable**.

Matlab: comando `Ob=obsv(A,C);`

Observabilidad discreta: gramiano

Energía de la señal observada (supuesto escalado adecuado)

$$\|\bar{Y}_N\|^2 = \bar{Y}_N^T \bar{Y}_N = x_0^T O_N^T O_N x_0$$

Definamos $G_N^o := O_N^T O_N$.

- $G_N^o = C^T C + A^T C^T C A + \cdots + (A^{N-1})^T C^T C A^{N-1}$
- $G_N^o = A^T G_{N-1} A + C^T C$
- $null(G_N^o) = null(\mathcal{O})$ para $N \geq n$.

Sistema Observable: $\mathcal{O}$ de rango completo; equiv, G_∞^o invertible.

- G_∞^o se denomina **gramiano de observabilidad**. La "energía" transferida a sensores por x_0 es $x_0^T G_\infty^o x_0$.
- Vectores propios: estados más "observables"; valores propios: grado de observabilidad (norma señal sensores observada). Si muy pequeño, candidato a reducción de orden o requiere rediseño sensores.

Matlab: `Ginf_obs=gram(sys,'o');`

Observabilidad discreta: gramiano

Energía de la señal observada (supuesto escalado adecuado)

$$\|\bar{Y}_N\|^2 = \bar{Y}_N^T \bar{Y}_N = x_0^T O_N^T O_N x_0$$

Definamos $G_N^o := O_N^T O_N$.

- $G_N^o = C^T C + A^T C^T C A + \cdots + (A^{N-1})^T C^T C A^{N-1}$
- $G_N^o = A^T G_{N-1} A + C^T C$
- $null(G_N^o) = null(\mathcal{O})$ para $N \geq n$.

Sistema Observable: $\mathcal{O}$ de rango completo; equiv, G_∞^o invertible.

- G_∞^o se denomina **gramiano de observabilidad**. La “energía” transferida a sensores por x_0 es $x_0^T G_\infty^o x_0$.
- Vectores propios: estados más “observables”; valores propios: grado de observabilidad (norma señal sensores observada). Si muy pequeño, candidato a reducción de orden o requiere rediseño sensores.

Matlab: `Ginf_obs=gram(sys,'o');`

Observabilidad discreta (caso aleatorio)

Si los sensores tienen ruido, la ecuación de la secuencia de muestras es:

$$\bar{Y}_N = O_N x_0 + \bar{W}_N$$

donde $\bar{W}_N$ es una columna de variables aleatorias de varianza 1 (con escalado adecuado). El estimado de x_0 (mínimos cuadrados) es $\hat{x}_0 = (O_N^T O_N)^{-1} O_N(\bar{Y}_N + \bar{W}_N)$, con lo que el ruido influye en un "error":

$$e = x_0 - \hat{x}_0 = (O_N^T O_N)^{-1} O_N \bar{W}_N$$

de varianza:

$$E(ee^T) = (O_N^T O_N)^{-1} O_N E(\bar{W}_N \bar{W}_N^T) O_N^T (O_N^T O_N)^{-1} = (G_N^o)^{-1}$$

Tomando *infinitas* muestras, el mejor estimado posible de x_0 tiene una precisión tal que, con ruido de medida $\mathcal{N}(0, I)$ existe un 99.7% de probabilidad de que el error $e = x_0 - \hat{x}_0$ esté en el elipsoide $\mathcal{E}_o := \{e^T G_\infty^o e \leq 3^2\}$.

*Si existe ruido de proceso $x_{k+1} = Ax_k + v_k$, las predicciones se hacen peores. La mejor predicción para ese caso es el observador óptimo (Filtro de Kalman), ver: http://personales.upv.es/asala/videos/est2k.html

Sección 4

Otras consideraciones

Caso contínuo

Definiciones análogas para caso $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$.

Matrices de controlabilidad/observabilidad: idénticas.

Gramianos: fórmulas con integrales en vez de sumas.

Interpretación determinista idéntica (con integral de entrada/salida).
Interpretación estocástica, ciertas diferencias.

*Detalles omitidos por brevedad/simplicidad.

Estructura de bloques

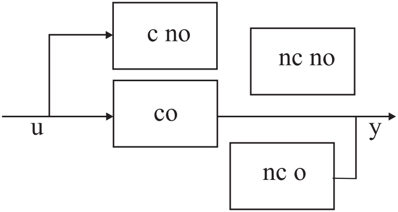
Los estados del sistema se pueden clasificar, segun controlabilidad:

- Controlables: $x \in col(\mathcal{C})$.
- NO controlables: el resto (perpendiculares a columnas), $x \in null(\mathcal{C}^T)$.

y según observabilidad en:

- NO observables: $x \in null(\mathcal{O})$.
- Observables: el resto $x \in col(\mathcal{O}^T)$.

Con lo que hay 4 combinaciones:



Forma de Kalman

Existe una transformación del estado $x_{new} = Tx_{old}$ que transforma un sistema a la forma $\dot{x} = TAT^{-1}x + TBu$, $y = CT^{-1}x + Du$ con estructura:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_{co} \\ x_{c,no} \\ x_{nc,o} \\ x_{nc,no} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{co} \\ x_{c,no} \\ x_{nc,o} \\ x_{no}\, nc, no \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{co} \\ x_{c,no} \\ x_{nc,o} \\ x_{nc,no} \end{pmatrix} + Du$$

Sistema estabilizable: estados no controlables (A_{33}, A_{44}) estables.
Sistema detectable: estados no observables (A_{22}, A_{44}) estables.
Realización mínima: $\dot{x}_{co} = A_{11}x_{co} + B_1 u, \quad y = C_1 x_{co} + Du$ si E,D

Conclusiones

- Controlabilidad: capacidad de mover el estado con u.
- Observabilidad: capacidad de mover los sensores con x.
- Respuesta si/no basada en rangos/invertibilidad de matrices.
- Gramianos dan una noción gradual, y direcciones perpendiculares más o menos observables/controlables.
- Estados no controlables o no observables no influyen en el comportamiento entrada salida $u \to y$, esto es, en $G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D$.
    - Si tienen significado tecnológico, cambiar actuadores (nc) o sensors (no).
    - Si no tienen interés tecnológico, eliminarlos del modelo. Matlab: `minreal`
- estados "poco controlables" o "poco observables" (según gramiano), candidatos a reducción de orden (en otra presentación).