Control mediante discretización de reguladores contínuos en representación interna por transformación bilineal (Tustin)

Antonio Sala

DISA – Universitat Politècnica de València

Presentación en vídeo en: http://personales.upv.es/asala/YT/V/**drsst**.html

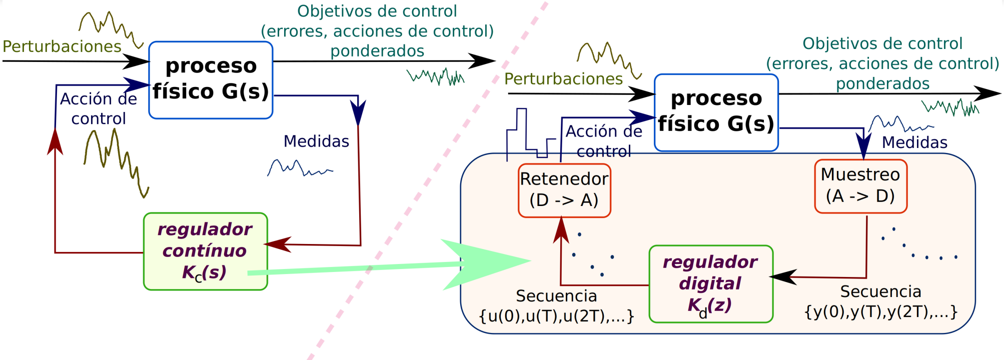
Introducción

Motivación:
Reguladores complejos/multivariables/orden alto recomendable usar representación interna.¿Cómo discretizar si se ha hecho diseño continuo?

Objetivos:
Comprender cómo sustituir un regulador contínuo $K_c(s)$ por muestreo$\rightarrow$ $K_d(z)$ $\rightarrow$retenedor en representación interna al usar la transformación de **Tustin**.

Contenido:
Discretización de Tustin (bilineal) para reguladores en representación interna.

Discretización de reguladores contínuos



1. Diseño inicial en tiempo contínuo.
2. **Aproximación** de $K(s)$ por $\mathcal{K}:=\to$[Muestreo]$\to K(z) \to$[reten.]$\to$

   $\mathcal{K}$ es un sistema con entrada y salida continuas, pero no es invariante en el tiempo...
   Retraso de fracción de período en medidas no sólo retrasa, sino que cambia la **forma** de la señal de salida.

Objetivo

Dado un regulador continuo $ss(A_c, B_c, C_c, D_c)$, representado con

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_c \cdot x + B_c \cdot e \\ u &= C_c \cdot x + D_c \cdot e \end{aligned}$$

obtener una aproximación por Tustin discreta $ss(A_d, B_d, C_d, D_d, T)$:

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A_d \cdot \xi(k) + B_d \cdot e(k) \\ u(k) &= C_d \cdot \xi(k) + D_d \cdot e(k) \end{aligned}$$

*Manipulaciones algebraicas harán $\xi \neq x$.

Aproximación bilineal (Tustin)

$$\frac{du}{dt} = e \quad \approx\Rightarrow \quad \frac{u(k+1) - u(k)}{T} = \frac{e(k+1) + e(k)}{2}$$

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{T} = A_c \frac{x(k+1) + x(k)}{2} + B_c \frac{e(k+1) + e(k)}{2}$$

operando:

$$(I - A_c \frac{T}{2})x(k+1) = (I + A_c \frac{T}{2})x(k) + TB_c \frac{e(k+1) + e(k)}{2}$$

$$x(k+1) = (I - A_c \frac{T}{2})^{-1}(I + A_c \frac{T}{2}) \cdot x(k) + (I - A\frac{T}{2})^{-1} TB_c \cdot \frac{e(k+1) + e(k)}{2}$$

que es causal (se puede programar) pero no está en representación normalizada.

Además, habría que programar la ecuación de salida.

Tustin: repr. interna normalizada resultante

Expresemos la fórmula como:

$$(I - A_c\frac{T}{2})x(k+1) - \frac{T}{2}B_c e(k+1) = (I + A_c\frac{T}{2})x(k) + \frac{T}{2}B_c e(k)$$

Definamos $\xi(k) := (I - A_c\frac{T}{2})x(k) - \frac{T}{2}B_c e(k)$, con lo que:

$$x(k) = (I - A_c\frac{T}{2})^{-1}\left(\xi(k) + \frac{T}{2}B_c e(k)\right) \qquad (1)$$

Entonces, tenemos

$$\xi(k+1) = (I + A_c\frac{T}{2})x(k) + \frac{T}{2}B_c e(k)$$

$$\xi(k+1) = (I + A_c\frac{T}{2})\cdot(I - A_c\frac{T}{2})^{-1}\left(\xi(k) + \frac{T}{2}B_c e(k)\right) + \frac{T}{2}B_c e(k)$$

Copiando la última ecuación para continuar:

$$\xi(k+1) = (I + A_c\frac{T}{2}) \cdot (I - A_c\frac{T}{2})^{-1}\left(\xi(k) + \frac{T}{2}B_c e(k)\right) + \frac{T}{2}B_c e(k)$$

$$\xi(k+1) = (I+A_c\frac{T}{2})\cdot(I-A_c\frac{T}{2})^{-1}\xi(k)+\left((I + A_c\frac{T}{2}) \cdot (I - A_c\frac{T}{2})^{-1} + I\right)\frac{T}{2}B_c e(k$$

Nótese que:

$$(I+A_c\frac{T}{2})\cdot(I-A_c\frac{T}{2})^{-1}+I = (I+A_c\frac{T}{2})\cdot(I-A_c\frac{T}{2})^{-1}+\underbrace{(I - A_c\frac{T}{2})(I - A_c\frac{T}{2})^{-1}}_{I} = 2I\cdot(I-A_c\frac{T}{2})^{-1}$$

La ecuación de estado normalizada queda, finalmente, como:

$$\xi(k+1) = \underbrace{(I + A_c\frac{T}{2}) \cdot (I - A_c\frac{T}{2})^{-1}}_{A_d} \cdot\xi(k) + \underbrace{(I - A_c\frac{T}{2})^{-1}TB_c}_{B_d} \cdot e(k)$$

Discretización de Tustin: ecuación de salida

A partir de (1), se tiene que:

$$u(k) = C_c x(k) + D_c e(k) = C_c \cdot \left(I - A_c \frac{T}{2}\right)^{-1} \left(\xi(k) + \frac{T}{2} B_c e(k)\right) + D_c e(k)$$

esto es:

$$\begin{aligned} u(k) &= C_c x(k) + D_c e(k) \\ &= \underbrace{C_c\left(I - A_c \frac{T}{2}\right)^{-1}}_{C_d} \xi(k) + \underbrace{\left(C_c\left(I - A_c \frac{T}{2}\right)^{-1} \frac{T}{2} B_c + D_c\right)}_{D_d} e(k) \end{aligned}$$

*El significado "físico" de $\xi(k) := (I - A_c \frac{T}{2})x(k) - \frac{T}{2} B_c e(k)$ es, aproximadamente $\xi(k) \approx x(KT - T/2)$, esto es, ξ es la aproximación de Euler del estado "en medio" de la muestra actual y la anterior.

Ver Capítulo 6, Franklin,Powell,Workman – *Digital Control of Dynamic Systems*

Conclusiones

- [Muestreo-Control-Retenedor] no tiene equivalente discreto $K(z)$ exacto.
- Se ha detallado para controladores representados como representación interna lineal cómo pasar de unas matrices ss(A_c, B_c, C_c, D_c) a la representación discreta ss$(A_d, B_d, C_d, D_d, \text{T})$ en el caso bilineal/Tustin.

Nota: Existen transformaciones (zoh,foh) de la repr. interna basadas en la exponencial de la matriz A_c, exactas para entradas constantes o lineales entre muestreos, que se suelen usar en discretización de procesos.

– Para integrador puro, 'Tustin' coincide con 'foh', y para períodos pequeños 'Tustin' es la aproximación de Padé $e^{AT} \approx (I + AT/2)(I - AT/2)^{-1}$ de la discretización 'foh'. Por tanto, en discretización de reguladores, la opción 'foh' es una alternativa* razonable a la de Tustin con, quizás, más significado físico (interpolación lineal de errores entre muestreo a período pequeño).

* Pero tampoco garantiza estabilidad en bucle cerrado a período grande... Con reguladores, todo es una aproximación.