Discretización de procesos con ruido gaussiano: fórmula de Van Loan para la varianza

Antonio Sala

Modelado, Identificación y Control de Sistemas Complejos

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**vanloan**.html

Presentación

Motivación:

Los procesos con entrada determinista en control por computador tienen discretización exacta ZOH. ¿Cómo discretizar el efecto del ruido?

Objetivos:

Comprender la fórmula de Van Loan para obtener la solución numérica de acumulación de ruido por la ecuación de varianzas de un proceso estocástico lineal en un intervalo de tiempo. Sólo se necesita "expm", no integrales.

Contenidos:

Modelo. Ecuaciones de medias/varianzas. Discretización ZOH. Discretización Varianza. Fórmula Van Loan. Conclusiones.

Modelo del proceso

Supongamos proceso lineal: $\dot{x} = Ax + Bu + Fw$ siendo u una entrada conocida, x el estado y w un ruido blanco contínuo de distribución normal (proceso gaussiano), de parámetro de varianza I (PSD a todas las frecuencias).

Realmente x no es derivable, y la ecuación de arriba es una representación "informal" de $dx = (Ax + Bu)dt + Fd\mathcal{W}$ siendo $\mathcal{W}$ el paseo aleatorio (proceso de Wiener) estándar.

*Si $d\mathcal{W}$ no fuera de varianza $I \cdot dt$,sino Hdt, $H > 0$, la factorirzación de Choleski $H = QQ^T$ lo convertiría a $F' = FQ$ excitado por ruido blanco de PSD 1.

Simulación

Si es gaussiano y la cond. inicial es de distrib. normal, sólo tenemos que simular medias y varianzas para tener una caracterización completa del proceso en todo instante.

Ecuación de medias:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + Bu$$

Ecuación de varianzas:

$$\frac{dP}{dt} = AP + PA^T + W$$

siendo $W = FHF^T$ un parámetro de varianza (dens. espectral potencia) conocido.

Discretización ZOH ec. medias

Es como la discretización ZOH normal, añadiendo la ecuación $\frac{du}{dt} = 0$.
Tendríamos ec. medias discreta $\bar{x}_{k+1} = A_d(T)\bar{x}_k + B_d(T)u_k$, con

$$\begin{pmatrix} A_d(T) & B_d(T) \\ 0 & I \end{pmatrix} = exp\left[\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T\right]$$

Realmente $B_d(T)$ también puede obtenerse como una integral a partir de la solución, bien conocida, de la EDO de 1er orden:

$$\bar{x}(T) = e^{AT}\bar{x}(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(0)\, d\tau = \underbrace{e^{AT}}_{A_d(T)} \bar{x}(0) + \underbrace{\left(\int_0^T e^{A\tau}\, d\tau\right) \cdot B}_{B_d(T)} \cdot u(0)$$

Discretización ecuación de varianzas

A partir de la solución exponencial (demostración en otro material)

$$P(t) = e^{At} \cdot P(0) \cdot e^{A^T t} + \int_0^t e^{A\zeta} W e^{A^T \zeta} \, d\zeta$$

Eligiendo $t = T$, el período de muestreo, tenemos

$$P_{k+1} = A_d(T) \cdot P_k \cdot A_d^T(T) + W_d(T)$$

siendo $W_d(T) = \int_0^T e^{A\tau} W e^{A^T \tau} \, d\tau$.

*La expresión de arriba es la *ecuación de varianzas* para el proceso estocástico en tiempo discreto

$$x_{k+1} = A_d(T) + x_k B_d(T) u_k + w_k, \qquad E[w_k w_k^T] = W_d(T)$$

Métodos numéricos de calculo de $W_d(T)$

Recordemos $W_d(T) = \int_0^T e^{A\tau} W e^{A^T \tau}\, d\tau$, y $\mathcal{G}_c = W_d(\infty)$ es el gramiano (varianza en estado estacionario). Opciones:

- Cálculo simbólico directo. Matlab lo hace (matrices pequeñas).
- Fórmula de Van Loan, válida para inestable, pero puede estar muy mal condicionada numéricamente para períodos grandes.
- Otras fórmulas válidas sólo para sistemas estables, sin integradores, ...

La fórmula de Van Loan es la fórmula por defecto implementada en `kalmd` (y en `lqrd` para problemas de control), por lo que su demostración es el objetivo de este vídeo.

Vale para discretizar a períodos "pequeños"... lo cual es razonable si realmente se desea hacer control/estimación del estado de forma correcta.

Fórmula de Van Loan para W_d

Consideremos:

$$\Theta := \begin{pmatrix} -A & W \\ 0 & A^T \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que $\Theta^2 = \begin{pmatrix} A^2 & WA^T - AW \\ 0 & (A^T)^2 \end{pmatrix}$, Θ^3, … son todas triangulares superiores; también lo es (por su serie de Taylor) la exponencial

$$e^{\Theta \cdot t} = \begin{pmatrix} F_1(t) & G(t) \\ 0 & F_2(t) \end{pmatrix}$$

Siendo $F_1(0) = F_2(0) = I$, $G(0) = 0$, porque $e^{\Theta \cdot 0} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$

Fórmula de Van Loan (2)

Como

$$\begin{pmatrix} \frac{dF_1}{dt} & \frac{dG}{dt} \\ 0 & \frac{dF_2}{dt} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} e^{\Theta \cdot t} = \Theta e^{\Theta t} = \begin{pmatrix} -A & W \\ 0 & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(t) & G(t) \\ 0 & F_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -AF_1 & -AG + WF_2 \\ 0 & F_2 A^T \end{pmatrix}$$

Podemos decir (usando cond. iniciales):

$$\frac{dF_1}{dt} = -AF_1 \qquad \Rightarrow \qquad F_1(t) = e^{-At} F_1(0) = e^{-At}$$

$$\frac{dF_2}{dt} = F_2 A^T \qquad \Rightarrow \qquad F_2(t) = F_2(0) e^{A^T t} = e^{A^T t}$$

$$\frac{dG}{dt} = -AG + WF_2 \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = e^{-At} G(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} W F_2(\tau)\, d\tau$$

Fórmula de Van Loan (3)

Como $G(0) = 0$, sustituyendo $F_2(\tau) = e^{A^T\tau}$, tenemos:

$$G(t) = e^{-At} \int_0^t e^{A\tau}\, W\, e^{A^T\tau}\, d\tau$$

con lo que, dado que $F_2(t)^T = e^{At}$, tenemos el resultado principal:

$$F_2(t)^T \cdot G(t) = e^{At} \cdot e^{-At} \int_0^t e^{A\tau}\, W\, e^{A^T\tau}\, d\tau = \int_0^t e^{A\tau}\, W\, e^{A^T\tau}\, d\tau = W_d(t)$$

Conclusiones

La integral $W_d(T) = \int_0^T e^{A\tau}\, W\, e^{A^T\tau}\, d\tau$ puede calcularse a partir de la exponencial (`expm` en Matlab) de una matriz:

$$e^{\Theta \cdot T} = e^{\begin{pmatrix} -A & W \\ 0 & A^T \end{pmatrix} \cdot T} = \begin{pmatrix} F_1(T) & G(T) \\ 0 & F_2(T) \end{pmatrix}$$

de modo que $W_d = F_2(T)^T \cdot G(T)$.
Se implementa en un par de lineas de código Matlab.

No obstante, al haber exponenciales e^{AT} y e^{-AT} puede haber problemas de condicionamiento numérico para T grande... no los debería haber en los períodos de discretización T usuales y si se han eliminado polos muy rápidos no dominantes.

Es la opción que implementa `kalmd` en Matlab.