

Modelado de un elemento calefactor de líquido de primer orden: perfil interno exponencial de temperatura

© 2022, Antonio Sala Piqueras. Universitat Politècnica de València. Todos los derechos reservados.

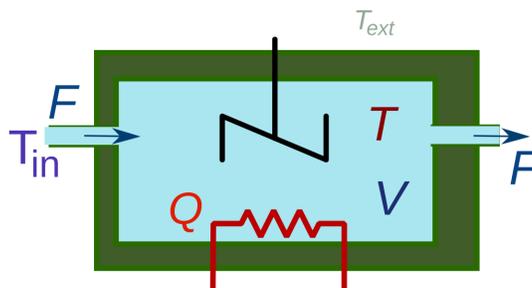
Presentación en vídeo: <http://personales.upv.es/asala/YT/V/term1exp.html>

Comentarios, notas y erratas en enlace en descripción del vídeo

Objetivo: modelar un tanque (volumen constante) por el que circula agua que es calentada por una resistencia calefactora. Asumir mezclado *NO* ideal... bueno, suponiendo una distribución exponencial interna de la temperatura inspirado en la solución estacionaria de las ecuaciones en derivadas parciales.

Modelo de primeros principios

Modelo de un tanque con una resistencia (proporcionando potencia calorífica Q , supuesta conocida, variable de entrada) que calienta el líquido (luego sustituiremos numéricamente los valores para el agua) que circula por dicho tanque (el agitador hace que la temperatura se iguale "rápidamente" en todo el volumen, aunque aquí vamos a considerar que eso *NO* es así):



- Entradas:

```
syms F real %caudal de entrada
syms Tin real %temp. entrada
syms Q real %potencia calorífica de la resistencia
```

- Parámetros constantes:

```
syms V real %volumen tanque
syms rho real %densidad
syms kappa real %fugas hacia exterior
syms Ce real %calor específico másico
```

- Variable de estado:

```

syms T real %temperatura MEDIA del líquido interior (no necesariamente igual a la de s
syms dTdt real % la derivada temporal de la vble estado

```

Si el líquido es incompresible y el tanque rígido, el balance de masas es trivial (entra lo mismo que sale, el caudal es el mismo a la izquierda que a la derecha, el volumen almacenado es constante, no hay trabajo mecánico a considerar, etc.).

En nuestro caso la energía del agua líquida a una cierta temperatura será, grosso modo, $E = MC_eT$ --en unidades incrementales desde una temperatura de referencia donde esté en estado líquido--, y las variaciones podrán ser $\frac{dE}{dt} = \frac{dM}{dt} C_eT + MC_e \frac{dT}{dt}$, esto es, por transferencia de masa o por calentamiento/enfriamiento.

Dentro del tanque (\equiv volumen de control) tenemos $\frac{dM}{dt} = 0$, por lo que sólo nos queda el calentamiento: $\frac{dE}{dt} = MC_e \frac{dT}{dt}$. Volumen constante implica que no hay términos de trabajo mecánico.

El balance es, haciendo derivadas temporales (tasas de cambio, potencias):

" *tasa cambio de energía almacenada por unidad de tiempo en el volumen de control*

$$\left(\frac{dE}{dt} = MC_e \frac{dT}{dt} \right)$$

= *potencia calorífica del exterior al volumen de control* ($Q - \kappa T$)

+ *energía total de la masa entrante por unidad de tiempo* $\left(+ \frac{dM_{in}}{dt} C_e T_{in} = +F\rho C_e T_{in} \right)$

- *energía total de la masa saliente por unidad de tiempo* $\left(- \frac{dM_{out}}{dt} C_e T_{out} = -F\rho C_e T_{out} \right)$ "

Agitación perfecta

En un material anterior más simple, con agitación "perfecta", si toda la temperatura interior es exactamente igual, entonces $T_{out} \equiv T$, y resultaba un modelo:

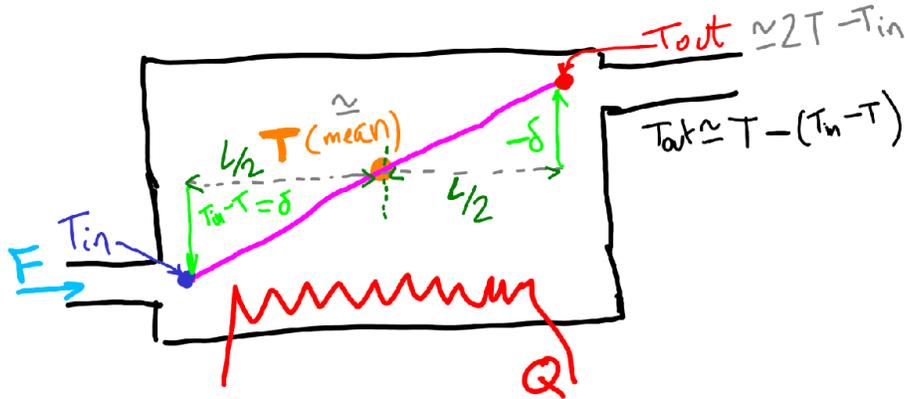
$$\underline{V\rho} C_e \frac{dT}{dt} = \underline{F\rho} C_e T_{in} - \underline{F\rho} C_e T - \kappa T + Q$$

Nota: $V\rho = Masa$, $F\rho =$ caudal másico \dot{m} ; el término $\dot{m}C_eT$ tiene dimensiones de potencia (flujo de entalpía), en el modelo está el entrante $\dot{m}C_eT_{in}$ y el saliente $\dot{m}C_eT$.

En representación normalizada:

- ecuación de estado $\frac{dT}{dt} = -\frac{F}{V} \cdot (T - T_{in}) - \frac{\kappa}{V\rho C_e} T + \frac{1}{V\rho C_e} Q$,
- ecuación de salida $T_{out} = T$.

Agitación imperfecta, suponiendo perfil lineal de temperatura



Sin embargo, aquí haremos la suposición $T_{out} = T - (T_{in} - T) = 2T - T_{in}$, siendo T la temperatura "media".

En ese caso,

$$\underline{V\rho C_e} \frac{dT}{dt} = F\rho C_e T_{in} - F\rho C_e T_{out} - \kappa T + Q = F\rho C_e T_{in} - F\rho C_e (2T - T_{in}) - \kappa T + Q = 2F\rho C_e (T_{in} - T) - \kappa T + Q$$

En resumen, queda un modelo (modelo 2) con

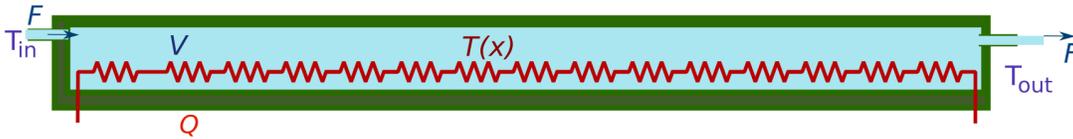
- la ecuación de estado sobre la temperatura "media", con una dinámica 2 veces más rápida que el modelo de agitación perfecta (en el término de "transporte", no en el de transferencia de calor al entorno):

$$\frac{dT}{dt} = -2\frac{F}{V} \cdot (T - T_{in}) - \frac{\kappa}{V\rho C_e} T + \frac{1}{V\rho C_e} Q$$

- ecuación de salida modificada (ya no es exactamente igual que el "estado"):

$$T_{out} = 2T - T_{in}$$

Agitación imperfecta, suponiendo perfil EXPONENCIAL de temperatura



En equilibrio $T_{eq}(x) = T_{in} \cdot e^{-\lambda \cdot x} + (1 - e^{-\lambda \cdot x})\bar{k}^{-1} \cdot \bar{Q}_{eq}$, según la solución de la EDP asociada 1D.

Si suponemos que $T(x) = Ae^{-\lambda x} + B$, tenemos $T_{in} = T(0) = A + B$, $T_{out} = T(L) = Ae^{-\lambda L} + B$, con lo que

```
syms ti to a b el real
M=[ti==a+b; to==a*el+b]
```

M =

$$\begin{pmatrix} ti = a + b \\ to = b + a \cdot el \end{pmatrix}$$

```
solve(M, {a, b})
```

```
ans = struct with fields:
  a: -(ti - to)/(el - 1)
  b: -(to - el*ti)/(el - 1)
```

estos son, bien formateados las soluciones para A y B :

$$A = \frac{T_{in} - T_{out}}{1 - e^{-\lambda L}}, \quad B = \frac{T_{out} - e^{-\lambda L}T_{in}}{1 - e^{-\lambda L}}$$

entonces la temperatura media $\bar{T} = \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx$ es la que verifica que la energía almacenada (con el cero en temp. exterior y sin cambios de fase) es $E = V\rho C_e \bar{T}$.

En efecto $E = \int_0^L \rho C_e T(x) S dx$, con lo que $E = (S \cdot L \cdot C_e \cdot \rho) \cdot \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx = V\rho C_e \bar{T}$.

$$\text{resulta en: } \bar{T} = \frac{A}{\lambda L} (1 - e^{-\lambda L}) + B = \frac{T_{in} - T_{out}}{\lambda L} + \frac{T_{out} - e^{-\lambda L}T_{in}}{1 - e^{-\lambda L}}$$

Nota: como caso particular, sin potencia Q y asumiendo régimen estacionario (equilibrio en tiempo), entonces $T_{out} = e^{-\lambda L}T_{in}$ (en nuestro sistema de referencia la temperatura exterior se supone "cero"),

por lo que $B = 0$ y $\bar{T} = \frac{T_{in} - T_{out}}{\lambda L}$ is la LMTD (diferencia de temperatura media logarítmica),

$\bar{T} = \frac{T_{in} - T_{out}}{\ln T_{in} - \ln T_{out}}$, que es MUY usada en cálculos de intercambiadores de calor (estacionarios).

Pasando a común denominador:

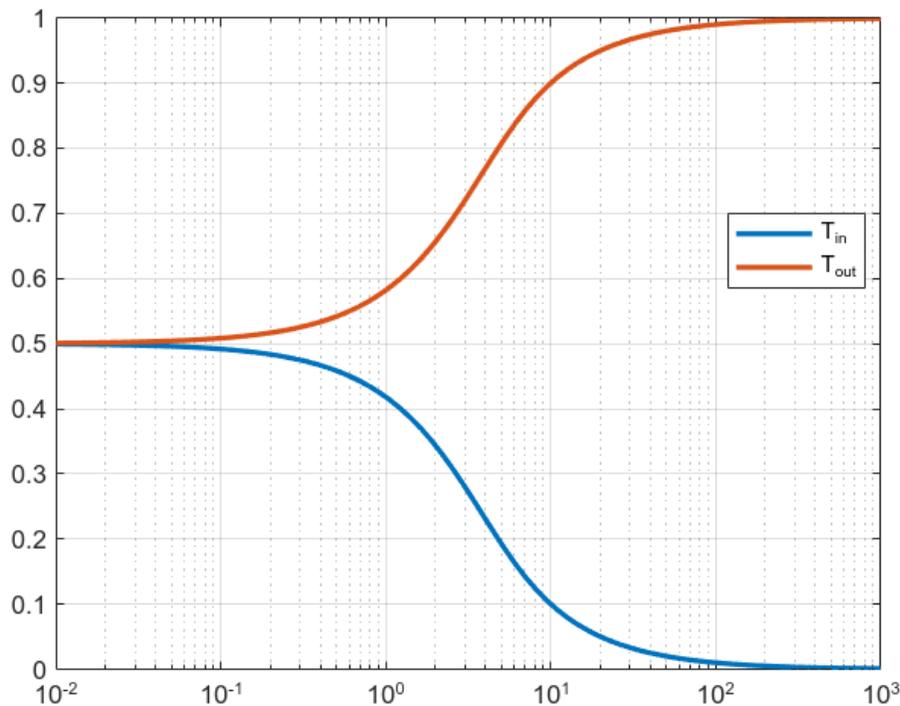
$$\bar{T} = \frac{T_{in}(1 - (1 + \lambda L)e^{-\lambda L}) + T_{out}(\lambda L - 1 + e^{-\lambda L})}{\lambda(1 - e^{-\lambda L}) \cdot L}$$

operando se puede comprobar que

$$\bar{T} = (1 - \beta)T_{in} + \beta T_{out}$$

con $\beta(\lambda L) = \frac{\lambda L - (1 - e^{-\lambda L})}{\lambda L(1 - e^{-\lambda L})} = \frac{1}{\frac{1}{1 - e^{-\lambda L}} - \frac{1}{\lambda L}}$ con la forma:

```
lamLr=logspace(-2,3,80);
explamL=exp(-lamLr);
beta=(lamLr-1+explamL)./(lamLr.*(1-explamL));
semilogx(lamLr,[1-beta; beta],LineWidth=2), grid on, legend("T_{in}", "T_{out}", Location
```



Límites:

- Cuando $\lambda \rightarrow \infty$ sale: $\bar{T} \rightarrow T_{out}$, $\beta = 1$
- Cuando $\lambda \rightarrow 0$, entonces $e^{-\lambda L} \approx 1 - \lambda L + \lambda^2 L^2/2$

$$\bar{T} = \frac{T_{in}(1 - (1 + \lambda L)(1 - \lambda L + \lambda^2 L^2/2)) + T_{out}(\lambda L - 1 + (1 - \lambda L + \lambda^2 L^2/2))}{\lambda(1 - (1 - \lambda L + \lambda^2 L^2/2)) \cdot L}$$

Tomando términos del "menor" grado:

$$\bar{T} = \frac{T_{in}\lambda^2 L^2/2 + T_{out}\lambda^2 L^2/2}{\lambda^2 L^2} = (T_{in} + T_{out})/2, \text{ esto es } \beta = 0.5.$$

Balance de energía (potencia) en modelo 1er orden:

En ese caso, $T = (1 - \beta)T_{in} + \beta T_{out}$, con $0.5 \leq \beta \leq 1$, quitemos la "barra" a la notación de la temperatura media, por simplificar notación.

$$\text{usando } T_{out} = \frac{1}{\beta}T - \frac{1-\beta}{\beta}T_{in}$$

$$V\rho C_e \frac{dT}{dt} = F\rho C_e T_{in} - F\rho C_e T_{out} - \kappa T + Q = F\rho C_e T_{in} - F\rho C_e \left(\frac{1}{\beta}T - \frac{1-\beta}{\beta}T_{in}\right) - \kappa T + Q = \frac{1}{\beta}F\rho C_e(T_{in} - T) - \kappa T + Q$$

- la ecuación de estado sobre la temperatura "media", con una dinámica igual o más rápida que el modelo de agitación perfecta (en el término de "transporte", no en el de transferencia de calor al entorno):

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\beta} \frac{F}{V} \cdot (T - T_{in}) - \frac{\kappa}{V\rho C_e} T + \frac{1}{V\rho C_e} Q$$

- ecuación de salida modificada (ya no es exactamente igual que el "estado"):

$$T_{out} = \frac{1}{\beta}T - \frac{1-\beta}{\beta}T_{in}$$

*Nótese que β para que el resultado "respete el régimen estacionario" es función de parámetros físicos (conductividad térmica fluido-exterior, dimensiones) y del calor aportado por la resistencia.

En un caso genérico con cambios de Q , F , T_{in} el valor óptimo de β cambiaría con las entradas... Si todas están cerca de cierto punto de operación, bueno, ya tendremos una idea para β

y, si queremos, linealizamos.

Linealización/ FdT:

$$\frac{dT}{dt} \approx -\frac{1}{\beta} \frac{F_0}{V} \cdot (T - T_{in}) - \frac{1}{\beta} \frac{F}{V} \cdot (T_0 - T_{in,0}) - \frac{\kappa}{V\rho C_e} T + \frac{1}{V\rho C_e} Q$$

con $\mu = -(T_0 - T_{in,0})/V$, negativo si la temperatura "media" es superior a la de entrada en el PF (calentando con la resistencia), positivo si la temperatura media es inferior a la de entrada (caso intercambiador sin resistencia interna):

$$T(s) = \frac{\frac{1}{V\rho C_e} Q + \frac{F_0}{\beta V} T_{in} + \frac{\mu}{\beta} F}{s + \frac{\kappa}{V\rho C_e} + \frac{F_0}{\beta V}}$$

$$T_{out}(s) = \frac{\frac{1}{\beta V\rho C_e} Q + \frac{F_0}{\beta^2 V} T_{in} + \frac{\mu}{\beta^2} F}{s + \frac{\kappa}{V\rho C_e} + \frac{F_0}{\beta V}} - \frac{s + \frac{\kappa}{V\rho C_e} + \frac{F_0}{\beta V}}{s + \frac{\kappa}{V\rho C_e} + \frac{F_0}{\beta V}} \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) T_{in}$$

Resultando:

$$T_{out}(s) = \frac{1}{\beta V\rho C_e} \cdot \frac{1}{s + \frac{\kappa}{V\rho C_e} + \frac{F_0}{\beta V}} \cdot Q(s) + \frac{\frac{\mu}{\beta^2}}{s + \frac{\kappa}{V\rho C_e} + \frac{F_0}{\beta V}} \cdot F(s) + \frac{(s + \frac{\kappa}{V\rho C_e})(1 - \frac{1}{\beta}) + \frac{F_0}{\beta V}}{s + \frac{\kappa}{V\rho C_e} + \frac{F_0}{\beta V}} \cdot T_{in}(s)$$

Obviamente, en el transitorio no son ciertos, pero al menos en régimen permanente acertarán. Complicado simbólicamente, pero en simulación es el caso.