

# Elipsoides y su relación con matrices definidas positivas

Antonio Sala

Universitat Politècnica de València

Presentaciones en vídeo:

<http://personales.upv.es/asala/YT/V/ellip2.html>  
<http://personales.upv.es/asala/YT/V/ellip4.html>  
<http://personales.upv.es/asala/YT/V/ellip6.html>

<http://personales.upv.es/asala/YT/V/ellip1.html>  
<http://personales.upv.es/asala/YT/V/ellip3.html>  
<http://personales.upv.es/asala/YT/V/ellip5.html>  
<http://personales.upv.es/asala/YT/V/ellip7.html>

# Presentación

## Motivación:

Los elipsoides son cuerpos geométricos asociados a matrices simétricas definidas positivas que aparecen en gran cantidad de situaciones, siendo la teoría de control una de ellas.

## Objetivos:

Comprender su definición, importancia en aplicaciones y propiedades básicas.

## Contenidos:

Definiciones. Aplicaciones. Representaciones alternativas. Diagonalización, SVD, otras propiedades.



# Definiciones básicas (1): Esferas

**Esfera:** Una esfera  $n$ -dimensional de radio 1 centrada en el origen verifica  $\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ . En notación matricial  $x^T x = x^T I x \leq 1$ .

Una esfera  $n$ -dimensional de radio  $\rho$  centrada en el origen verifica  $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \rho^2$ , esto es,  $\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\rho}\right)^2 \leq 1$ .

En notación matricial  $(x/\rho)^T (x/\rho) = x^T \cdot \rho^{-2} I \cdot x \leq 1$ .



## Definiciones básicas (2)

**Elipsoide alineado con los ejes:** Si a todos los puntos de la esfera unidad los transformamos con  $\tilde{x}_1 = 2x_1$ ,  $\tilde{x}_2 = x_2$ ,  $\dots$  (“doblamos” el tamaño en  $x_1$ ), entonces

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{2^2} + \tilde{x}_2^2 + \dots + \tilde{x}_n^2 \leq 1.$$

Si a todos los puntos de la esfera unidad los transformamos con  $\tilde{x}_1 = \sigma_1 x_1$ ,  $\tilde{x}_2 = \sigma_2 x_2$ ,  $\dots$ , entonces  $\sum_{i=1}^n \frac{\tilde{x}_i^2}{\sigma_i^2} \leq 1$ .

En notación matricial,  $\tilde{x} = \Sigma x$ ,  $\Sigma$  diagonal;

$\tilde{x}^T \Sigma^{-2} \tilde{x} = \tilde{x}^T \Lambda \tilde{x} \leq 1$ , con  $\Lambda = (\Sigma^2)^{-1}$  una matriz diagonal (con elementos  $\lambda_i = \sigma_i^{-2}$  positivos).



# Motivación (para control)

- Acotar “norma” de señales:  $\|\xi\|^2 = \sum_i \xi_i^2 = \xi^T \xi \leq \gamma$ .
  - Los errores deben ser pequeños, buscamos  $e^T e \leq \gamma$  con  $\gamma$  “lo más pequeño posible” ... Las acciones de control no deben saturar...
  - Una vez tenemos múltiples variables controladas/manipuladas en diferentes unidades, aparecen elipsoides como  $u_1^2 + (u_3/5)^2 = u^T P u \leq \gamma$ ,  $P = \text{diag}(1, 1/5^2)$ , como “curvas de nivel  $\gamma$ ” en mínimos cuadrados ponderados, etc.
  - Para que  $y = Cx$  verifique  $y^T y \leq 1$ , entonces el estado debe verificar  $x^T (C^T C) x \leq 1$ , con  $P = C^T C$  no diagonal...
- Robótica: *manipulability, force, compliance ellipsoids*.
- [Avanzado:] control robusto, desigualdades matriciales lineales (LMI).



## Motivación (no control)

- Puro interés geométrico (focos, volumen, semiejes ...)
- Astronomía (leyes de Kepler), ...
- Relación con mínimos cuadrados (esferas) y mínimos cuadrados ponderados (elipsoides)
- Elipsoide de confianza en estadística multivariable, generaliza el “intervalo de confianza” monovariable.
- “Stress/strain ellipsoid” (tensiones/deformaciones) en elasticidad y resistencia de materiales.

## Definición de elipsoide genérico (centrado)

Si al elipsoide alineado con ejes lo rotamos (matriz de rotación  $R \equiv$  matriz ortogonal  $R^T R = I$ ,  $R^{-1} = R^T$ ,  $\det(R) = 1$ ), entonces  $\tilde{x} = R \Sigma x$ , con  $\|x\| \leq 1$ ,  $x = \Sigma^{-1} R^T \tilde{x}$ , con lo que  $x^T x \leq 1$  se escribe en las nuevas coords  $\tilde{x}^T R \Sigma^{-2} R^T \tilde{x} \leq 1$ . Pero la diagonalización de una matriz  $P$  definida positiva arbitraria permite expresarla como  $P = R \Lambda R^T$  ( $R$  ortogonal,  $\Lambda$  diagonal), lo que motiva la definición general:

Un elipsoide (centrado en el origen) es el cuerpo geométrico determinado por una forma cuadrática definida positiva con

$$\mathcal{E}_P = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq 1\}$$

# Elipsoide NO centrado en el origen

Si no está centrado en el origen, sería

$$\mathcal{E}_{(x_0, P)} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_0)^T P (x - x_0) \leq 1\}$$

En control, el origen  $x_0 = 0$  es el punto de operación alrededor del que se quiere que esté el estado, no consideraremos el caso  $x_0 \neq 0$ , es sólo una traslación/cambio de variable. Tampoco consideraremos niveles diferentes a 1, como  $x^T P x \leq 2$ , que coincide con  $x^T (P/2) x \leq 1$ .

También en estadística se suele hacer un cambio de variable trivial (traslación) para convertir a la “media muestral” en “cero” y trabajar en variables incrementales. En la jerga estadística se denomina “centrado”.

Bueno, como la “media muestral” no coincide con la “media” real, si hay pocos datos, ese paso no es tan “trivial”.



Dado  $\mathbf{x}^T P \mathbf{x} \leq 1$ , diagonalizando  $P = V D V^T$ , entonces  $V$  es ortogonal (rotación) y  $D$  diagonal.

La rotación  $\tilde{x} = V^T x$  resulta en  $x = V\tilde{x}$ ,  $x^T P x = \tilde{x}^T V^T P V \tilde{x}$ , pero  $V^T (V D V^T) V = D$ , o sea,  $\tilde{x}^T D \tilde{x} \leq 1$  es un elipsoide alineado con los ejes.

La longitud de los semiejes principales de la elipse son

$$\sigma_i = 1/\sqrt{d_{ii}}.$$

# Otras representaciones de elipsoides

- Con matriz invertida  $\mathcal{E}_{Q^{-1}} = \{x : x^T Q^{-1} x \leq 1\}$ ,  
 $Q = P^{-1}, \equiv \{x^T P x \leq 1\}$ 
  - ▶  $P$  es “inversamente proporcional a cuadrado de tamaño”  
Autovectores = dirección de semiejes; longitud  $1/\sqrt{\text{eigenvalues}(P)}$
  - ▶  $Q$  es “directamente proporcional a cuadrado de tamaño” ...  
Autovectores = dirección de semiejes; longitud  $\sqrt{\text{eigenvalues}(Q)}$

## Ejemplo:

El elipsoide  $x^T \cdot 9 \cdot x \leq 1$  tiene radio  $1/3$ ; el elipsoide  $x^T \cdot (25)^{-1} \cdot x \leq 1$  tiene radio 5.

# Otras representaciones de elipsoides (2)

- Como esfera transformada  $x = Lu$ ,  $\|u\| \leq 1$ .

- Lo podemos transformar (con  $L$  invertible) a  $L^{-1}x = u$ ,  $x^T L^{-T} L^{-1} x \leq 1$ , o sea  $x^T (LL^T)^{-1} x \leq 1$ .

- También con  $L$  no invertible ( $L$  por ejemplo  $2 \times 5$  full row rank).

\*Consideremos pseudoinversa  $L^\dagger = L^T (LL^T)^{-1}$ .  $LL^\dagger = I$ , entonces la  $u$  de mínima norma tal que  $x = Lu$  es  $\bar{u} = L^\dagger x$ , en efecto  $L\bar{u} = LL^\dagger x = x$ . Se debe cumplir  $\bar{u}^T \bar{u} \leq 1$ , esto es:

$$\bar{u}^T \bar{u} = x^T (LL^T)^{-1} L \cdot L^T (LL^T)^{-1} x = x^T (LL^T)^{-1} x \leq 1$$

- ¿Tiene sentido transformar la esfera 5D a un elipse 2D con  $L_{2 \times 5}$ ? En control podemos tener 5 estados y 2 sensores o algo así... Pero el mismo elipsoide lo podríamos expresar más “eficientemente” como una transformación de la esfera 2D porque  $(LL^T)_{2 \times 2} \dots$  (siguiente pág.)

# Otras representaciones de elipsoides (2B)

Caso  $L$  no invertible (cont.): Si  $L_{5 \times 2}$  full column rank.

Llamemos  $Q_{5 \times 3}$  a cualquier cosa que haga  $M_{5 \times 5} = [L \ Q]$  invertible (p. ej., Matlab  $\text{null}(L^T)$ ).

Si formamos  $M_\epsilon = [L \ \epsilon Q]$ , es invertible con  $\epsilon \neq 0$ .

La esfera unidad 5D,  $\tilde{u}^T \tilde{u} \leq 1$  mapea con  $x = M_\epsilon \tilde{u}$  a  $x^T (M_\epsilon M_\epsilon^T)^{-1} x \leq 1$ ,  $x^T (LL^T + \epsilon^2 QQ^T)^{-1} x \leq 1 \dots$  haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$  llegamos al resultado... aunque se trata de un elipsoide “degenerado”, porque  $LL^T$  tiene rango 2.



## Otras representaciones de elipsoides (3)

- Como esfera transformada  $x = Lu$ ,  $\|u\| \leq 1$ .
- A la inversa, toda matriz  $Q_{n \times n} > 0$  puede transformarse a  $Q = L \cdot L^T$ , con  $L_{n \times n}$ , con lo que el elipsoide  $x^T Q^{-1} x \leq 1$  es la transformación mediante  $x = Lu$  de la esfera unidad.

Ver: descomposición de Cholesky ( $L$  triangular), o raíz cuadrada de matriz via diagonalización:  $Q = VDV^T$ ,  $L = \sqrt{Q} = V \cdot \sqrt{D} \cdot V^T$ , resultando en  $L$  simétrica.



# Elipsoides degenerados e hiperboloides

- $x^T P x \leq 1$ : si  $P$  no invertible, pueden ser ecuaciones de cilindros ( $x^2 + z^2 \leq 1$  es cilindro con eje en dirección  $y$ );
- $x^T Q^{-1} x \leq 1$  si  $Q$  no invertible es elipsoide de dimensión menor  $\{x^2 + z^2 \leq 1, y = 0\}$ .  
\*No podemos "escribir" el resultado de  $Q^{-1}$ , porque no existe: considéralo una expresión "informal" (formalmente, debería ser cierto límite).
- Si  $P$  tiene algún valor propio negativo, da lugar a hiperboloides  $x^2 - y^2 \leq 1$ .

No suelen tener interés en estadística y control, suelen indicar algún error conceptual: no controlabilidad u observabilidad, determinismo estadístico. La geometría hiperbólica tiene interés en Física (relatividad especial).

# Inclusión (forma no invertida)

- El elipsoide “1”,  $x^T P_1 x \leq 1$ , está incluido en el elipsoide “2”,  $x^T P_2 x \leq 1$ , sii  $P_2 \preceq P_1$  [entendido como  $P_1 - P_2 \succeq 0$ ]

[ $\Rightarrow$ ] si  $x^T (P_1 - P_2) x \geq 0 \ \forall x$ , entonces para todo  $x$  en elipsoide “1”,  $x^T P_2 x \leq x^T P_1 x \leq 1$ .

[ $\Leftarrow$ ] Si no se cumple  $x^T (P_1 - P_2) x \geq 0$  es porque existe  $\xi$  tal que  $\xi^T P_2 \xi > \xi^T P_1 \xi$ ... haciendo “zoom” hasta que  $\xi^T P_1 \xi = 1$  (borde de “1”) se verifica  $\xi^T P_2 \xi > 1$  (fuera de “2”), o sea hay puntos de “1” que no están en “2”.

# Inclusión (forma invertida)

- El elipsoide “1”  $x^T Q_1^{-1} x \leq 1$  está incluido en  $x^T Q_2^{-1} x \leq 1$  sii  $Q_2 \succeq Q_1$ . [entendido como  $Q_2 - Q_1 \succeq 0$ ]

Con la transparencia anterior, sii  $P_1 - P_2 \succeq 0$ , con  $P_1 = Q_1^{-1} \succ 0$ ,  $P_2 = Q_2^{-1} \succ 0$ .

Pero  $P_1 - |P_2| \succeq 0$ ,  $P_1 \succ 0$ ,  $P_2 \succ 0$ ,  $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} P_1 & I \\ I & P_2^{-1} \end{pmatrix} \succeq 0$ ,  $P_1 \succ 0$ ,  $P_2 \succ 0$

(Schur)  $\Leftrightarrow P_2^{-1} - P_1^{-1} \succeq 0$ ,  $P_1 \succ 0$ ,  $P_2 \succ 0$  (Schur).

La última expresión es  $Q_2 - Q_1 \succeq 0$ .

\*Lema del **complemento de Schur**: Si  $A \succ 0$  y  $C \succ 0$ , entonces:

$$A - B^T C B \succeq 0, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C^{-1} \end{pmatrix} \succeq 0 \quad \Leftrightarrow \quad C^{-1} - B A^{-1} B^T \succeq 0$$



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



# Inclusión (2): esferas inscrita y circunscrita

## ● Esfera exterior (circunscrita):

- El elipsoide  $x^T P x \leq 1$  está incluido en la esfera de radio  $\rho$  sii  $P \succeq \rho^{-2} I$ , esto es,  $x^T P x \geq \rho^{-2} x^T x \Leftrightarrow \min \text{eig}(P) \geq \rho^{-2}$ .
- El elipsoide  $x^T Q^{-1} x \leq 1$  está incluido en la esfera de radio  $\rho$  sii  $Q \preceq \rho^2 I$ , esto es,  $x^T Q x \leq \rho^2 x^T x \Leftrightarrow \max \text{eig}(Q) \leq \rho^2$ .

## ● Esfera interior (inscrita):

- El elipsoide  $x^T P x \leq 1$  incluye a la esfera de radio  $\rho$  sii  $\rho^{-2} I \succeq P$ , esto es,  $\rho^{-2} \geq \max \text{eig}(P)$ .
- El elipsoide  $x^T Q^{-1} x \leq 1$  incluye a la esfera de radio  $\rho$  sii  $\rho^2 I \preceq Q$ , esto es,  $\rho^2 \leq \min \text{eig}(Q)$ .

# Otras propiedades

## Corte con línea/plano/hiperplano (subespacio, en general):

- El elipsoide  $x^T P x \leq 1$  intersecta con el subespacio  $m$ -dimensional  $\{x \in \mathbb{R}^n : \exists \xi \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } x = H_{n \times m} \xi\}$  en el elipsoide  $\xi^T H^T P H \xi \leq 1$ .

Ejemplo: intersección ellipse con eje  $x_1$ ,  $H = [1; 0]$ ,  
 $H^T P H = P_{11}$ .

\* En las coordenadas originales  $x$ , será un elipsoide degenerado.

Usando resultado en siguiente página,  $x^T (H(H^T P H)^{-1} H^T)^{-1} x \leq 1$ , con  $Q = H(H^T P H)^{-1} H^T$  singular.

# Transformación lineal

El elipsoide  $x^T Q^{-1} x \leq 1$ , ante la transformación  $y = Cx$ , resulta el elipsoide  $y^T (CQC^T)^{-1} y \leq 1$ .

En efecto, existe  $L$  tal que  $Q = LL^T$ , entonces  $x = Lu$ ,  $\|u\| \leq 1$ . Por tanto,  $y = Cx = CLu$  dará lugar a un elipsoide  $y^T \tilde{Q}^{-1} y \leq 1$ , con  $\tilde{Q} = (CL)(L^T C^T) = CLL^T C^T = CQC^T$ .

**Ejemplo, proyección sobre ejes:** Si consideramos  $C = (I \ 0)$ , entonces el elipsoide  $x^T Q^{-1} x \leq 1$  proyecta sobre el eje/plano 1 con  $y^T Q_{11}^{-1} y \leq 1$ .

**Fórmula de Schur (inversa matriz por bloques):** el elipsoide  $x^T P x \leq 1$  proyecta con  $y^T Q_{11}^{-1} y \leq 1$ , siendo  $Q_{11} = P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^T$ .



# Relación con descomposición Valores Singulares

Si la representación es como “esfera transformada”  $x = Lu$ ,  $\|u\| \leq 1$ , consideremos la descomposición SVD de  $L = USV^T$ . El elipsoide  $x^T Q^{-1} x \leq 1$  con  $Q = LL^T$ , resulta

$$x^T ((USV^T)(VS^T U^T))^{-1} x = x^T (USS^T U^T)^{-1} x \leq 1$$

De modo que  $U$  son las direcciones de los semiejes principales y la diagonal de  $S$  son las longitudes de dichos semiejes:  
 $(x^T U) \cdot (SS^T)^{-1} \cdot (U^T x) \leq 1$ .

Considerando el punto de la esfera  $u_i = V_{[i]}$  (columna  $i$ -ésima de  $V$ ), entonces  $Vu_i = e_i$  (vector canónico “ $i$ ”), y  $x = Lu = U_{[i]} \cdot s_{ii}$  está en el extremo del semieje  $i$ .