Análisis del error del filtro de Kalman extendido

Antonio Sala

control de sistemas multivariables

Dept. Ing. Sistemas y Automatica (DISA)
Universitat Politècnica de València (UPV)

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**errekf**.html

Presentación

Motivación:

Las fórmulas de mejor predicción, en procesos lineales son el **Filtro de Kalman**, y es ampliamente usado. Pero en muchos casos, las ecuaciones del modelo son **no lineales**; el filtro extendido (linealizado alrededor de trayectoria estimada) es la alternativa más sencilla.

Objetivos:

Comprender los errores causados por no considerar términos adicionales de la serie de Taylor de una no-linealidad.

Contenidos:

Planteamiento del problema. Propagación de error. Conclusiones y alternativas.

Planteamiento del problema

Supongamos que tenemos variable x conocida de forma aproximada, $x \sim N(x_0, \Sigma)$. Equivalentemente, $x = x_0 + \delta x$, siendo $\delta x \sim N(0, \Sigma)$.

Tenemos modelo $y = f(x)$ y deseamos describir (aprox.) la distribución de probabilidad de y, para simulación o, si disponible medida de y, para corregir su estimado y posiblemente el de x (filtro de Kalman).

Linealización $f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{\frac{df}{dx}(x_0)}_{J} \delta x$, permite aproximar $y \sim N(f(x_0), J^2\Sigma)$:

$$\bar{y} = E[f(x)] \approx f(x_0) + J\,\underbrace{E[\delta x]}_{0} = f(x_0)$$

$$\Sigma_y = E[(f(x) - \bar{y})^2] \approx E[(f(x_0) + J\delta x - \bar{y})^2] = E[(J\delta x)^2] = E[J^2 \delta x^2] = J^2\Sigma$$

¿Qué error se comete al despreciar términos no-lineales (cuadráticos, ...)? ¿Hay métodos que cometan menos error?

Errores de la aproximación linealizada: media

Supongamos función no lineal monovariable (J: jacobiano f', H : hessiano f''), cuyo argumento es una vble. aleatoria. Su serie de Taylor es:

$$y = f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + J\delta x + \frac{1}{2}H \cdot \delta x^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)\delta x^3 \ldots$$

Ahora calculemos media, suponiendo $E[\delta x] = 0$, $E[\delta x^2] = \Sigma$:

$$\bar{y} = E[f(x_0 + \delta x)] = f(x_0) + \frac{1}{2}H\Sigma + \ldots$$

Modelo linealizado supone $H = 0$ y también derivadas sucesivas; el error cometido por EKF en la estimación de la media aparece en rojo.

***Multivariable:** el término de grado 2 es $1/2 \cdot \delta x^T H\delta x$, cuya media resultaría $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}\Sigma_{ij}$, y similares triples, cuádruples sumas en términos grado superior, que no son de interés por el momento.

Errores de la aproximación linealizada: varianza

En cuanto a varianza, suponiendo $E[\delta x^3] = 0$ (simetría, sesgo 0), y siendo $E[\delta x^4] = K$ (curtosis):

$$\Sigma_y = E[(f(x_0 + \delta x) - \bar{y})^2] = E\left[\left(J\delta x + \frac{1}{2}H\cdot(\delta x^2 - \Sigma) + \frac{1}{6}f'''\delta x^3 + \ldots\right)^2\right]$$

$$= E\left[J^2\delta x^2 + \frac{1}{4}H^2(\delta x^4 + \Sigma^2 - 2\delta x^2\Sigma) + \frac{J\cdot f'''}{3}\delta x^4)\right]$$

$$= J^2\Sigma \;+ \frac{1}{4}H^2(K - \Sigma^2) + \frac{J\cdot f'''}{3}K + \ldots$$

donde error cometido por linealización (derivadas 2 o más igual a cero) aparece en rojo.

*Multivariable: cuadrados deben ser transpuestas y expresiones más complicadas, pero "*grosso modo*", idea es la misma: curtosis produce cambios en varianza Σ_y que el modelo linealizado no considera... también añadiría error el sesgo, si existiera.

Conclusiones y alternativas

- El EKF asume distribución normal, y al propagar por modelos linealizados el resultado siempre es distribución normal (simétrica).
- Las no-linealidades hacen que el cálculo de media y varianza sea incorrecto... y, por supuesto, también con momentos superiores (sesgo, curtosis, ...), no discutidos porque fórmulas de Kalman sólo consideran medias y varianzas-covarianzas.

Alternativas:

- Second-order Extended Kalman filter (EKF2), añadiendo términos correctores necesita calcularse J como en EKF, y además H (y también $K \approx 3\Sigma^2$ asumiendo que es dist. Normal). Precisión regular, coste cómputo algo alto.
- Particle: simular muchas ($\to \infty$) "partículas" sobre la no-linealidad. Precisión MUY buena, coste cómputo MUY alto.
- Unscented (Uhlmann) Transform: simular "pocas", "especialmente elegidas" partículas (resultados parecidos a EKF2 pero sin calcular J, H, K). Precisión regular, coste cómputo bajo. Popular en aplicaciones.