Respuesta en Frecuencia de Sistemas Lineales (tiempo discreto)

Antonio Sala
Universitat Politecnica de Valencia

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**rfd**.html

Introducción

Motivación: La respuesta ante entradas periódicas es de gran importancia en ingeniería

- Corriente alterna, vibraciones mecánicas, climatización, control

Objetivo: Calcular la respuesta en régimen permanente senoidal de un sistema lineal en tiempo discreto.

Contenidos:

- Generalidades, Cálculo de respuesta en frecuencia, Ejemplo.

Respuesta en frecuencia

- Los registros de datos para análisis por computador son recogidos únicamente en tiempo discreto, con un cierto período de muestreo.
- Los sistemas lineales con función de transferencia $G(z)$ cambian la amplitud y la fase pero no la frecuencia de las señales de entrada.
- Su efecto es de una multiplicación frecuencia a frecuencia de los contenidos de frecuencia de las entradas $y(\omega) = \mathcal{G}(\omega) * u(\omega)$.
- el factor $\mathcal{G}(\omega)$ se denomina respuesta en frecuencia del sistema.

Cálculo de resp. en frecuencia

Función de Transferencia (c.i. nulas):

$$y(z) = \mathbf{G}(z)u(z) = \frac{N(z)}{D(z)}u(z) \qquad (1)$$

Entrada temporal: $u(k) = \cos(\omega T \cdot k)$, esto es, $cos(\omega t)$ muestreado cada T segundos (T es el período de muestreo).

Fórmula de Euler: $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$. $\qquad j = \sqrt{-1}$

La entrada puede expresarse como $u(k) = Re(e^{j\omega Tk})$.

Definamos $\bar{u}(k) := e^{j\omega Tk} = cos(\omega Tk) + j\sin(\omega Tk)$.

- Por superposición, salida ante $\bar{u}(k)$ será $\bar{y}(k) := y_R(k) + jy_I(k)$, siendo $y_R(k)$ la salida ante $\cos(\omega Tk)$, e $y_I(k)$ la salida ante $\sin(\omega Tk)$.
- Objetivo: Calcular salida $\bar{y}(k)$ ante $\bar{u}(k)$, luego evaluar parte real $y_R(k)$.

Cálculo de resp. en frecuencia

Tablas de transformadas:

Entrada: $\bar{u}(k) := e^{j\omega Tk} = (e^{j\omega T})^k$,

$$\bar{u}(z) = \frac{z}{z - e^{j\omega T}}$$

Salida estacionaria a buscar:

$$y_R(k) = M\cos(\omega Tk + \varphi) = Re(M \cdot e^{j(\omega Tk+\varphi)}) = Re(\bar{y}(k))$$

$$\boxed{\bar{y}(z) = \frac{Mz \cdot e^{j\varphi}}{z - e^{j\omega T}}}$$

Objetivo: demostrar que existen M y φ y calcularlos.

Cálculo de resp. en frec (2)

Descomposición de la salida (fracciones simples):

$$y(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \frac{z}{z - e^{j\omega T}} = \frac{Mz \cdot e^{j\varphi}}{z - e^{j\omega T}} + \frac{R(z)}{D(z)}$$

Pasando a común denominador:

$$\frac{N(z) * z}{D(z) \cdot (z - e^{j\omega T})} = \frac{Mz \cdot e^{j\varphi} D(z) + (z - e^{j\omega T}) R(z)}{D(z) \cdot (z - e^{j\omega T})}$$

M y φ van a poderse calcular haciendo $z = e^{j\omega T}$ en numeradores...

Cálculo de resp. en frec (3)

$$\frac{N(z) * z}{D(z) \cdot (z - e^{j\omega T})} = \frac{Mz \cdot e^{j\varphi} D(z) + (z - e^{j\omega T}) R(z)}{D(z) \cdot (z - e^{j\omega T})}$$

Igualando numeradores, si $z = e^{j\omega T}$ entonces:

$$N(e^{j\omega T}) * e^{j\omega T} = M e^{j\omega T} e^{j\varphi} D(e^{j\omega T})$$

$$\frac{N(e^{j\omega T})}{D(e^{j\omega T})} = M e^{j\varphi}$$

$$\boxed{\mathbf{G}(e^{j\omega T}) = M e^{j\varphi}}$$

Cálculo resp. frec: resultado final

De la descomposición en transp. anterior:

$$\mathbf{G}(e^{j\omega T}) = Me^{j\varphi}$$

Teorema: En la respuesta estacionaria $y = M\cos(\omega Tk + \varphi)$ ante $\cos(\omega Tk)$:

- La amplitud M es $|\mathbf{G}(e^{j\omega T})|$ (módulo).
- El desfase φ es $\arg(\mathbf{G}(e^{j\omega T}))$ (argumento).

Ejemplo

– pasamos a Matlab –