Respuesta en Frecuencia de sistemas lineales

Antonio Sala
Universitat Politecnica de Valencia

Video-presentación disponible en http://personales.upv.es/asala/YT/V/freqresp.html

Introducción

Motivación: La respuesta ante entradas periódicas es de gran importancia en ingeniería

- Corriente alterna, vibraciones mecánicas, climatización, control

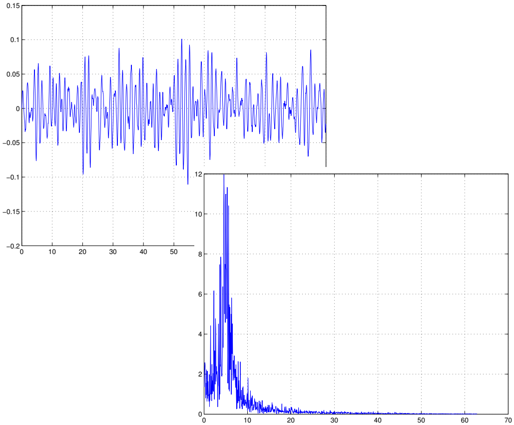
Objetivo: Calcular la respuesta en régimen permanente senoidal de un sistema lineal.

Contenidos:

- Generalidades, Cálculo de respuesta en frecuencia, Ejemplo.

Respuesta en frecuencia

- Las señales experimentales tienen un “contenido frecuencial” dado por la transformada de Fourier (algoritmos FFT), $y(\omega)$.



Respuesta en frecuencia (2)

- Los sistemas dinámicos cambian el contenido frecuencial de las señales de entrada.
- Los sistemas lineales $G(s)$ cambian la amplitud y la fase pero no la frecuencia de las señales de entrada.
- Su efecto es de una multiplicación frecuencia a frecuencia de los contenidos de frecuencia de las entradas $y(\omega) = G(\omega) * u(\omega)$.
- el factor $G(\omega)$ se denomina respuesta en frecuencia del sistema.

Cálculo de resp. en frec

Función de Transferencia (c.i. nulas):

$$y(s) = \mathbf{G}(s)u(s) = \frac{N(s)}{D(s)}u(s) \tag{1}$$

Entrada temporal: $u(t) = \cos(\omega t)$.
Tablas de transformadas: Entrada $u(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
Salida estacionaria a buscar:

$$\boxed{y(t) = M\cos(\omega t + \phi) \;\Rightarrow\; y(s) = \frac{(M\cos\phi)s - (M\sin\phi)\omega}{s^2+\omega^2}}$$

Objetivo: demostrar que existen y calcular M y ψ.

Cálculo de resp. en frec (2)

Descomposición de la salida (fracciones simples):

$$y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{s}{s^2+\omega^2} = \frac{(M\cos\phi)s - (M\sin\phi)\omega}{s^2+\omega^2} + \frac{R(s)}{D(s)} \qquad (2)$$

Pasando a común denominador:

$$\frac{N(s) * s}{D(s)\cdot(s^2+\omega^2)} = \frac{((M\cos\phi)s - (M\sin\phi)\omega)D(s) + (s^2+\omega^2)\cdot R(s)}{(s^2+\omega^2)\cdot D(s)}$$

M y ϕ van a poderse calcular haciendo $s = j\omega$ en numeradores...

Cálculo de resp. en frec (3)

$$\frac{N(s)*s}{D(s)\cdot(s^2+\omega^2)} = \frac{((M\cos\phi)s-(M\sin\phi)\omega)D(s)+(s^2+\omega^2)\cdot R(s)}{(s^2+\omega^2)\cdot D(s)}$$

Igualando numeradores, si $s=j\omega$ entonces $s^2=-\omega^2$ y $s^2+\omega^2=0$.

También se usará la identidad $1/j=-j$.

$$N(j\omega)*j\omega = ((M\cos\phi)j\omega-(M\sin\phi)\omega)D(j\omega)$$

$$\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}*j\omega = ((M\cos\phi)j\omega-(M\sin\phi)\omega)$$

$$\boxed{\mathbf{G}(j\omega) = ((M\cos\phi)+(M\sin\phi)j) = M(\cos\phi+j\sin\phi)}$$

Cálculo resp. frec: resultado final

Salida a buscar: $y(t) = M\cos(\omega t + \phi)$.

De la descomposición en transp. anterior:

$$\mathbf{G}(j\omega) = M(\cos\phi + j\sin\phi)$$

Teorema:

- La amplitud M de la respuesta estacionaria ante $\cos(\omega t)$ es $|\mathbf{G}(j\omega)|$ (módulo).
- El desfase ϕ de la respuesta estacionaria ante $\cos(\omega t)$ es $\arg(\mathbf{G}(j\omega))$ (argumento).

Ejemplo

El sistema $G(s) = \frac{1}{s+1}$ tiene, ante una onda de $\omega = 2$ rad/s, $u(t) = cos(2t)$ una salida obtenida de:

$$G(2j) = \frac{1}{2j+1} = 0.2 - 0.4j = 0.4472\,(\cos(-1.11) + j\sin(-1.11))$$

Esto es, 0.4472_{-63^o} indica una amplitud de 0.4472 veces la amplitud de la entrada y un desfase de -1.11 radianes (63^o retrasada respecto a la onda de entrada).

Matlab: `>> s=tf('s'); G=1/(s+1); ff=freqresp(G,2)`

```
ff = 0.2000 - 0.4000i
>> abs(ff)
ans = 0.4472
>> angle(ff)
ans = -1.1071
```