Variedades diferenciales: ejemplos mecánicos

Antonio Sala

DISA-UPV

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**varimec**.html

Presentación

Motivación:

La mecánica de sistemas multicuerpo requiere evaluar las ecuaciones del movimento en presencia de ligaduras mecánicas (restricciones). De modo abstracto, las posiciones y velocidades evolucionan en determinados conjuntos (variedades diferenciables).

Objetivos:

Comprender las ideas básicas sobre interpretación en el ámbito de sistemas mecánicos de derivadas parciales y variedades diferenciables.

Contenidos:

Preliminares. Variedades diferenciables en mecánica: ejemplos. Espacio tangente. Fibrado tangente. Conclusiones.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Derivadas parciales

Derivadas parciales (∂): la derivada de una función $f(r)$, $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es el vector fila $\frac{\partial f}{\partial r} := \left(\frac{\partial f}{\partial r_1} \; \frac{\partial f}{\partial r_2} \; \cdots \; \frac{\partial f}{\partial r_n}\right)_{1\times n}$.

Jacobiano (matriz de derivadas parciales): la derivada de una función $f(r)$, $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ es la matriz (o (1,1)-tensor en física moderna) cuyas filas son las derivadas de cada componente de f:

$$\frac{\partial f}{\partial r} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \frac{\partial f_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial r_1} & \frac{\partial f_m}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial r_n} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Variedades diferenciables en $\mathbb{R}^n$

Representación implícita (global): El conjunto

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$$

con $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^z$, $z < n$, es una variedad diferenciable de dimensión $\ell = n - z$ si $G_{z\times n} = \frac{\partial f}{\partial x}$ tiene rango z para todo $x \in S$.

Representación paramétrica: el conjunto

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists q \in V \ \text{ tal que } x = \phi(q)\}$$

siendo $V \subset \mathbb{R}^\ell$, $\phi : V \mapsto \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable de dimensión ℓ si $J_{n\times\ell} = \frac{\partial \Phi}{\partial q}$ tiene rango ℓ para todo q.

Ortogonalidad: Se cumple que las dos representaciones de la misma variedad verifican $G \cdot J = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right._{z\times n} \cdot \left.\frac{\partial \phi}{\partial q}\right._{n\times\ell} = 0$

Variedades diferenciables en mecánica

Ejemplo 1: Un péndulo esférico con masa puntual, de longitud L tiene 3 coordenadas de posición (x, y, z); su posición es una trayectoria en $\mathbb{R}^3$ que evolucionará en la variedad $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = L^2\}$, suponiendo que el punto desde donde cuelga es el origen. El jacobiano de la restricción es $G = (2x \; 2y \; 2z)$.

En representación paramétrica, sólo válida para "hemisferio sur" $(z < 0)$, podríamos escribir:

$$S_{sur} = \{(x, y, z) : \exists (x, y) \in V, \; z = -\sqrt{L^2 - x^2 - y^2}\}$$

con $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < L^2\}$. El jacobiano de la carta es $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{z} & \frac{-y}{z} \end{pmatrix}$ y siempre tiene rango 2, bien definido en V, y $GJ = 0$.

 ©2021 A. Sala

Cinemática de velocidades

- Para escribir las ecuaciones completas de movimiento necesitaremos saber el estado (posición, velocidad) de las masas intervinientes.
  - En repr. implícita, $f(x) = 0$ implica $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} = Gv = 0$: las velocidades (que son tangentes a la trayectoria) deben ser perpendiculares a filas de G.
  - En repr. paramétrica, $x = \phi(q)$ implica $v = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial q}\frac{dq}{dt} = J\dot{q}$: las velocidades físicas son las velocidades de las coordenadas multiplicadas por el jacobiano. Obviamente, se cumple $Gv = GJ\dot{q} = 0$.

Ejemplo: El lugar geométrico de las velocidades admisibles para el punto $p := (x, y, z)$ del péndulo es:

$$T_pS := \{(v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3 : 2xv_x + 2yv_y + 2zv_z = 0\}$$

*El concepto está muy relacionado con la **linealización**: la linealización de S alrededor de p es el conjunto de puntos $\hat{p}$ tal que $\hat{p} - p \in T_pS$, esto es, $G(\hat{p} - p) = 0$.

©2021 A. Sala

Variedades diferenciables en mecánica (ej. 2)

Ejemplo 2: dos masas puntuales unidas por una barra de longitud 4 tienen 3 coordenadas de posición cada una (x_i, y_i, z_i); su posición será una trayectoria en $\mathbb{R}^6$ que evolucionará en la variedad 5-dimensional $S := \{(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^6 : (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = 4^2\}$

- El lugar geométrico de las velocidades admisibles para el par de puntos $p = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ es:

$$T_pS := \{(vx_1, vy_1, vz_1, vx_2, vy_2, vz_2) \in \mathbb{R}^6 :$$
$$2(x_1 - x_2)(vx_1 - vx_2) + 2(y_1 - y_2)(vy_1 - vy_2) + 2(z_1 - z_2)(vz_1 - vz_2) = 0\}$$

Espacio y fibrado tangente a una variedad

En general, dado $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$, el **espacio tangente** (generalización del lugar geométrico de las velocidades) en $x = p \in S$ se define como $T_pS = \{v \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p v = 0\}$.

La "unión" de los puntos y sus espacios tangentes asociados se denomina **fibrado tangente** TS (**tangent bundle** en inglés), que generaliza el concepto de espacio de estados (posición-velocidad) (state space o phase space en inglés) de un sistema "mecánico":

$$TS := \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^{2n} : \; f(x) = 0, \; \frac{\partial f}{\partial x} v = 0 \right\}$$

*Si S es ℓ-dimensional, TS es, en sí mismo, una variedad 2ℓ-dimensional.

Fibrado tangente, ejemplo

En el caso de las dos masas unidas por una barra, el **estado posición-velocidad** será una trayectoria en $\mathbb{R}^{12}$ evolucionando en la variedad 10-dimensional dada por el fibrado tangente:

$$TS := \{(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, vx_1, vy_1, vz_1, vx_2, vy_2, vz_2) \in \mathbb{R}^{12} :$$
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = 4^2,$$
$$2(x_1 - x_2)(vx_1 - vx_2) + 2(y_1 - y_2)(vy_1 - vy_2) + 2(z_1 - z_2)(vz_1 - vz_2) = 0\}$$

Variedades diferenciables en $\mathbb{R}^n$: ejemplos

Ejemplo (cont): La representación **paramétrica** de las **posiciones** necesitará 5 grados de libertad; podemos, por ejemplo, considerar la posición de la masa 1 y dos ángulos que describan posición en la esfera alrededor de la masa 1 donde se encuentra forzosamente la masa 2:

$$S = \{ (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^6 : \exists (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que}$$
$$-\pi \leq q_4 \leq \pi, \;\; -\pi/2 \leq q_5 \leq \pi/2,$$
$$x_1 = q_1, \;\; y_1 = q_2, \;\; y_3 = q_3,$$
$$x_2 = q_1 + 4\cos(q_4)\cos(q_5), \;\; y_2 = q_2 + 4\sin(q_4)\cos(q_5), \;\; z_2 = q_3 + 4\sin(q_5) \}$$

El jacobiano es $J_{6\times 5}$, habría configuraciones singulares.

 ©2021 A. Sala

Variedades diferenciables en $\mathbb{R}^n$: ejemplos

Ejemplo (cont): La representación paramétrica de TS (las posiciones y velocidades admisibles, esto es, la **cinemática de posición y velocidad**) sería:

$$TS = \{(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, vx_1, vy_1, vz_1, vx_2, vy_2, vz_2) \in \mathbb{R}^{12} :$$
$$\exists (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, vq_1, vq_2, vq_3, vq_4, vq_5) \in \mathbb{R}^{10} \text{ tal que}$$
$$-\pi \leq q_4 \leq \pi, \ -\pi/2 \leq q_5 \leq \pi/2,$$
$$x_1 = q_1, \ y_1 = q_2, \ y_3 = q_3,$$
$$x_2 = q_1 + 4\cos(q_4)\cos(q_5), \ y_2 = q_2 + 4\sin(q_4)\cos(q_5), \ z_2 = q_3 + 4\sin(q_5)$$
$$vx_1 = vq_1, \ vy_1 = vq_2, \ vy_3 = vq_3,$$
$$vx_2 = vq_1 - 4\sin(q_4)\cos(q_5)vq_4 - 4\cos(q_4)\sin(q_5)vq_5,$$
$$vy_2 = vq_2 + 4\cos(q_4)\cos(q_5)vq_4 - 4\cos(q_4)\sin(q_5)vq_5, \ vz_2 = vq_3 + 4\cos(q_5)vq5\}$$

 ©2021 A. Sala

Conclusiones

Los sistemas mecánicos sujetos a restricciones requieren considerar:

- El lugar geométrico de las posiciones (variedad o manifold S de dimensión igual a grados de libertad l) en representación implícita o paramétrica
- El lugar geométrico de las velocidades para cada punto T_pS (espacio tangente)
- El lugar geométrico de los estados posición-velocidad TS (fibrado tangente)
- Las relaciones entre las dos representaciones implícita y paramétrica.

*Estas ideas (generalización de la **cinemática**) motivaron en parte la **geometría diferencial** en dimensiones > 3 y la **mecánica analítica/abstracta** en los siglos *XVIII* y *XIX*.
*El estudio de fuerzas y aceleraciones en las dos representaciones (**dinámica**) no es objeto de este material.