

Modelado de un elemento calefactor de líquido de primer orden (II):

Repr. interna, linealización y funciones de transferencia de modelos a) de "agitado perfecto (temp. homogénea)" y b) "agitado imperfecto (perfil lineal de temperatura)"

© 2022, Antonio Sala Piqueras. Universitat Politècnica de València. Todos los derechos reservados.

Presentaciones en vídeo:

<http://personales.upv.es/asala/YT/V/term1eP.html>

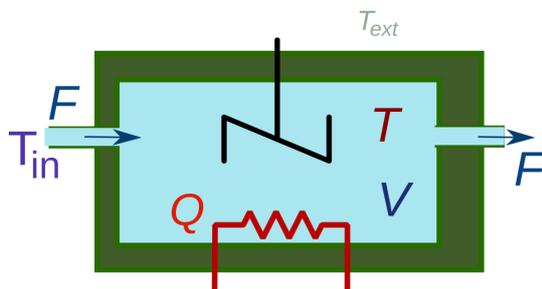
<http://personales.upv.es/asala/YT/V/term1ePtf.html>

Este código funcionó correctamente con Matlab R2021b

Objetivo: modelar un tanque (volumen constante) por el que circula agua que es calentada por una resistencia calefactora. Asumir mezclado *NO* ideal... bueno, suponiendo una distribución lineal interna de la temperatura... otros modelos con ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, con mecánica de fluidos computacional, etc. pueden "complicar" el asunto todo lo que se desee...

Modelo de primeros principios

Modelo de un tanque con una resistencia (proporcionando potencia calorífica Q , supuesta conocida, variable de entrada) que calienta el líquido (luego sustuiremos numéricamente los valores para el agua) que circula por dicho tanque (el agitador hace que la temperatura se iguale "rápidamente" en todo el volumen):



- Entradas:

```
syms F real %caudal de entrada
syms Tin real %temp. entrada
syms Q real %potencia calorífica de la resistencia
```

- Parámetros constantes:

```
syms V real %volumen tanque
syms rho real %densidad
syms kappa real %fugas hacia exterior
```

Notas respecto a κ : a) suponemos pto. Func. Text = 0, para no introducir dicha variable en el modelo; b) suponemos, por simplicidad que kappa no varía con el caudal F, que podría ser plausible (a más caudal, más transmisión por convección).

```
syms Ce real %calor específico másico
```

- Variable de estado:

```
syms T real %temperatura del líquido (dentro, igual a la de salida)
syms dTdt real % la derivada temporal de la vble estado
```

Si el líquido es incompresible y el tanque rígido, el balance de masas es trivial (entra lo mismo que sale, el caudal es el mismo a la izquierda que a la derecha, el volumen almacenado es constante, no hay trabajo mecánico a considerar, etc.).

Por tanto, sólo necesitamos hacer balance de energía para tener el modelo:

" cambio de energía en el volumen de control

= calor introducido o trabajo (PdV) del exterior sobre volumen de control

+ energía total de la masa entrante

- energía total de la masa saliente"

En nuestro caso la energía del agua líquida a una cierta temperatura será, grosso modo, $E = MC_eT$ --en unidades incrementales desde una temperatura de referencia donde esté

en estado líquido--, y las variaciones podrán ser $\frac{dE}{dt} = \frac{dM}{dt} C_e T + M C_e \frac{dT}{dt}$, esto es, por transferencia de masa o por calentamiento/enfriamiento.

Dentro del tanque (\equiv volumen de control) tenemos $\frac{dM}{dt} = 0$, por lo que sólo nos queda

el calentamiento: $\frac{dE}{dt} = M C_e \frac{dT}{dt}$. Volumen constante implica que no hay términos de trabajo mecánico.

El balance es, haciendo derivadas temporales (tasas de cambio, potencias):

" tasa cambio de energía almacenada por unidad de tiempo en el volumen de control

$$\left(\frac{dE}{dt} = MC_e \frac{dT}{dt}\right)$$

= potencia calorífica del exterior al volumen de control ($Q - \kappa T$)

+ energía total de la masa entrante por unidad de tiempo $\left(+\frac{dM_{in}}{dt} C_e T_{in} = +F\rho C_e T_{in}\right)$

- energía total de la masa saliente por unidad de tiempo $\left(-\frac{dM_{out}}{dt} C_e T_{out} = -F\rho C_e T_{out}\right)$ "

Agitación perfecta

En un material anterior más simple, con agitación "perfecta", si toda la temperatura interior es exactamente igual, entonces $T_{out} \equiv T$, y resultaba un modelo:

$$\underline{V\rho} C_e \frac{dT}{dt} = \underline{F\rho} C_e T_{in} - \underline{F\rho} C_e T - \kappa T + Q$$

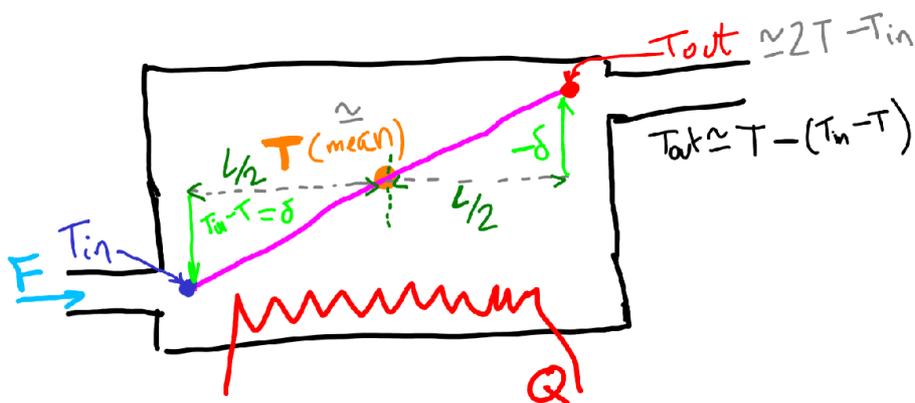
Nota: $V\rho = Masa$, $F\rho =$ caudal másico \dot{m} ; el término $\dot{m}C_e T$ tiene dimensiones de potencia (flujo de entalpía), en el modelo está el entrante $\dot{m}C_e T_{in}$ y el saliente $\dot{m}C_e T$.

En representación normalizada:

- ecuación de estado $\frac{dT}{dt} = -\frac{F}{V} \cdot (T - T_{in}) - \frac{\kappa}{V\rho C_e} T + \frac{1}{V\rho C_e} Q$,

- ecuación de salida $T_{out} = T$.

Agitación imperfecta, suponiendo perfil lineal de temperatura



Sin embargo, aquí haremos la suposición $T_{out} = T - (T_{in} - T) = 2T - T_{in}$, siendo T la temperatura "media".

En ese caso,

$$\rho C_e \frac{dT}{dt} = F\rho C_e T_{in} - F\rho C_e T_{out} - \kappa T + Q = F\rho C_e T_{in} - F\rho C_e (2T - T_{in}) - \kappa T + Q = 2F\rho C_e (T_{in} - T) - \kappa T + Q$$

En resumen, queda un modelo (modelo **2**) con

- la ecuación de estado sobre la temperatura "media", con una dinámica 2 veces más rápida que el modelo de agitación perfecta (en el término de "transporte", no en el de transferencia de calor al entorno):

$$\frac{dT}{dt} = -2\frac{F}{V} \cdot (T - T_{in}) - \frac{\kappa}{V\rho C_e} T + \frac{1}{V\rho C_e} Q$$

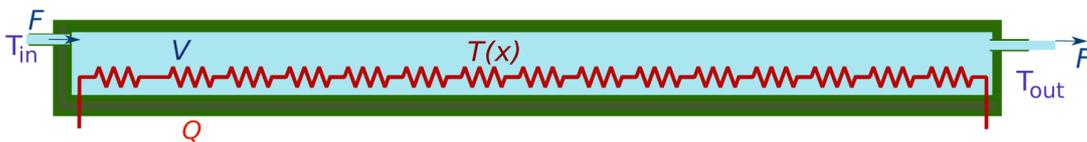
- ecuación de salida modificada (ya no es exactamente igual que el "estado"):

$$T_{out} = 2T - T_{in}$$

Comparativa sobre validez de aproximaciones

Si hay "mucho" agitación, entonces, claro la opción que la considera (1) sería la más adecuada.

Si NO hay agitación, y el elemento calentador/intercambiador es "alargado" (análisis 1D) entonces el modelo "perfecto" es una EDP (modelo y solución en otro material)



$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{F}{S} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\bar{\kappa}}{S\rho C_e} T + \frac{\bar{Q}}{S\rho C_e}$$

La solución en equilibrio de temperaturas suele ser "exponencial" a lo largo de la longitud (con el exponente dependiendo del caudal y del aislamiento κ), y analizando dicha solución, si la tubería está "bien aislada del exterior" o/y es "corta" (formalmente, tiempo de residencia del fluido pequeño) entonces la hipótesis de "perfil lineal" podría ser aproximadamente válida y mejor que la de temperatura constante; en caso contrario (tubería larga o tubería mal aislada... intencionalmente, por ejemplo si es un calentador con el exterior lleno de vapor, o es un refrigerador con alneas) la suposición de perfil "lineal" de temperaturas podría ser peor que la de "temperatura homogénea en el interior". En efecto, con $Q = 0$ usado como "intercambiador de calor", la noción a usar en cálculos no es "temperatura media", sino "temperatura media logarítmica" debido a los factores exponenciales de la solución exacta de la EDP: las aproximaciones de primer orden

propuestas son interesantes por su "sencillez" para integrarlas en simulaciones con más elementos pero no son una "solución válida en todos los casos".

Linealización de ambos modelos

Supondremos calculado un punto de operación de modo que tengamos valores de entradas $T_{in,0}$, F_0 , Q_0 , y estado en ese punto T_0 que verifiquen el modelo con derivadas a cero.

Nota: lo que sigue serán variables "incrementales", aunque no se haya introducido notación como ΔT o \bar{T} por abreviar.

Agitación perfecta (temp. homogénea)

Alrededor de un caudal y temperatura nominales, el modelo $T \equiv T_{out}$ resulta en:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{F_0}{V} \cdot (T - T_{in}) - \frac{(T_0 - T_{in,0})}{V} \cdot F - \frac{\kappa}{V\rho C_e} T + \frac{1}{V\rho C_e} Q$$

vamos a abreviar con $a = \frac{\kappa}{V\rho C_e}$, $b = \frac{1}{V\rho C_e}$, $\mu = \frac{T_0 - T_{in,0}}{V}$:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{F_0}{V} (T - T_{in}) - \mu \cdot F - aT + bQ$$

En función de transferencia (Laplace) es:

$$T(s) = \frac{1}{s + \frac{F_0}{V} + a} \cdot \left(\frac{F_0}{V} T_{in} + \mu F + bQ \right)$$

Son, ante cualquiera de las 3 entradas, todas funciones de transferencia de tipo $\frac{K}{s + p}$ (primer orden "de toda la vida", sin ceros).

El polo es tanto más rápido cuanto menos aislado esté el tanque, o cuanto más caudal (nominal) circule.

Si la temp. de entrada nominal es menor que la de salida (para eso ponemos Q), entonces $\mu < 0$, y subir el flujo "enfía" según el modelo.

Sustituyendo en función de parámetros físicos $a = \frac{\kappa}{V\rho C_e}$, $b = \frac{1}{V\rho C_e}$, $\mu = \frac{T_0 - T_{in,0}}{V}$ nos queda un modelo linealizado final:

$$T(s) = \frac{1}{s + \frac{F_0}{V} + \frac{\kappa}{V\rho C_e}} \cdot \left(\frac{F_0}{V} T_{in} + \mu F + \frac{1}{V\rho C_e} Q \right)$$

Agitación imperfecta (perfil lineal)

El modelo "2" linealizado es, en ec. de estado:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{2F_0}{V} \cdot (T - T_{in}) - \frac{2(T_0 - T_{in,0})}{V} \cdot F - \frac{\kappa}{V\rho C_e} T + \frac{1}{V\rho C_e} Q$$

$$T(s) = \frac{1}{s + \frac{2F_0}{V} + a} \cdot \left(\frac{2F_0}{V} T_{in} + 2\mu F + bQ \right)$$

Pero la salida del intercambiador no es el "estado", sino:

$$T_{out}(s) = 2T(s) - T_{in}(s) = \frac{2}{s + \frac{2F_0}{V} + a} \cdot \left(\frac{2F_0}{V} T_{in} + 2\mu F + bQ \right) - \frac{s + \frac{2F_0}{V} + a}{s + \frac{2F_0}{V} + a} T_{in}$$

que resulta en:

$$T_{out}(s) = \frac{1}{s + \frac{2F_0}{V} + a} \cdot \left(\left(\frac{2F_0}{V} - a - s \right) T_{in} + 4\mu F + 2bQ \right)$$

esto es, un modelo de fase no mínima ante la entrada T_{in} si $2\frac{F_0}{V} - a > 0$. Los modelos respecto a F y Q son muy parecidos al caso anterior (casi idénticos si $a \approx 0$, esto es, si la tubería está bien aislada).

En efecto, la respuesta "perfecta" (a partir de la EDP) si no hay ninguna agitación tiene un "retardo", tiempo que tarda en circular el fluido de un extremo al otro.

Por ejemplo, con $a = 0$, $Q = 0$, y caudal $F = F_0$ constante, el intercambiador "real" es simplemente un "**retardo**" de V/F segundos (washout time), en efecto, un análisis con ecuaciones en derivadas parciales así lo deduce.

Su aproximación de Padé de primer orden sería:

$$e^{-\frac{V}{F_0} \cdot s} \approx \frac{1 - \frac{V}{2F_0} \cdot s}{1 + \frac{V}{2F_0} \cdot s} = \frac{\frac{2F_0}{V} - s}{\frac{2F_0}{V} + s}$$

con lo que la similitud con el procedimiento de modelado seguido aquí es patente... de hecho, en otros materiales se solucionará la EDP de un intercambiador tubular de forma exacta (para flujo constante, es una EDP lineal) y aproximaciones de la misma darán lugar a este tipo de modelos.

Sustituyendo en función de parámetros físicos $a = \frac{\kappa}{V\rho C_e}$, $b = \frac{1}{V\rho C_e}$, $\mu = \frac{T_0 - T_{in,0}}{V}$ nos queda un modelo linealizado final:

$$T_{out}(s) = \frac{1}{s + \frac{2F_0}{V} + \frac{\kappa}{V\rho C_e}} \cdot \left(\left(\frac{2F_0}{V} - \frac{\kappa}{V\rho C_e} - s \right) T_{in} + 4\mu F + \frac{2}{V\rho C_e} Q \right)$$

Nótese que si κ es grande de modo que $2F_0 - \frac{\kappa}{\rho C_e} < 0$ el modelo tendría ganancia

"negativa" ante incrementos de T_{in} . Eso es, en efecto, contrario a toda intuición física, e indica que esta aproximación (perfil lineal de temperatura) sólo es válida para elementos alargados (todo es 1D) bien aislados (κ pequeño) o/y con tiempo de residencia V/F_0 pequeño (F_0/V grande), esto es, tubos calefactores "cortos" o operando a caudal "elevado".