# Modelado y simulación de calentador tubular mediante ecuaciones en derivadas parciales (EDP)



Presentación en vídeo: http://personales.upv.es/asala/YT/V/termedp.html

**Objetivo:** Modelar con "elementos finitos" la dinámica de un calentador tubular con una resistencia a lo largo del mismo calentando un fluido, convirtiéndose en una ecuación en derivadas parciales (EDP) cuando los elementos se hacen infinitesimales.

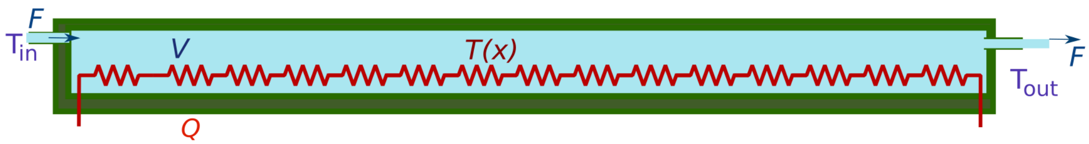
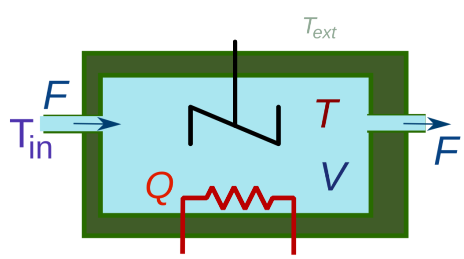



**Tabla de Contenidos**



## Modelo de primeros principios de 1 elemento

Modelo de un tanque con una resistencia (proporcionando potencia $Q$)




Entradas:

```
syms F real %caudal de entrada
syms Tin real %temp. entrada
syms Q real %calor de la resistencia
```

Parámetros constantes:

```
syms V real %volumen tanque
syms rho real %densidad
syms kappa real %pérdidas
syms Ce real %calor específico (supuesto no cambia con T)
```

Estado y su derivada:

```
syms T dTdt real %temperatura del líquido (dentro y salida) y su derivada (vble estado)
```

Balance de energía:

$$\underbrace{V\rho}\,C_e\frac{dT}{dt} = \underline{F\rho}C_eT_{in} - \underline{F\rho}C_eT - \kappa T + Q$$

```
Modelo=  V*rho*Ce*dTdt == F*rho*Ce*Tin - F*rho*Ce*T - kappa*T + Q;
```

Repr. interna:

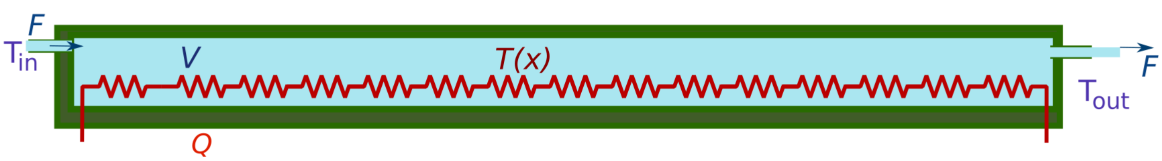
```
dTdt_sym=solve(Modelo,dTdt)
```

dTdt_sym =

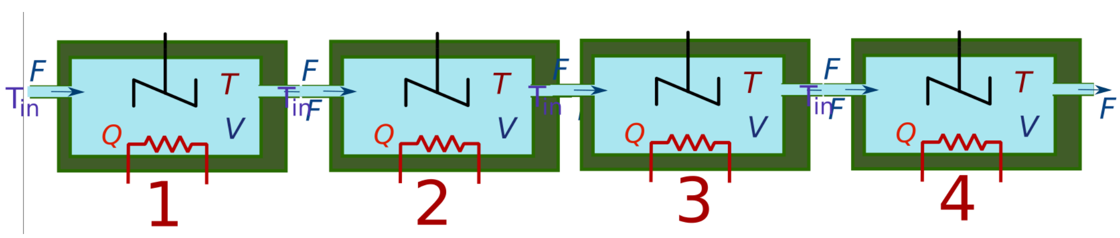
$$\frac{Q - T\,\kappa - \mathrm{Ce}\,F\,T\,\rho + \mathrm{Ce}\,F\,\mathrm{Tin}\,\rho}{\mathrm{Ce}\,V\,\rho}$$

## Modelo muchos elementos

Para modelar aproximadamante un calentador tubular:




haremos la conexión en serie de muchos de estos elementos ($N$, con $N \to \infty$):




El volumen y potencia calorífica en cada elemento será el total dividido por el número de elementos.

Tendremos: $F_i = F_{i-1} = F$ (caudal constante), $V_i = V/N$, $Q_i = Q/N$, $\kappa_i = \kappa/N$.

La $T_{in,i}$ entrada a un intercambiador será la salida del anterior $T_{in,i} = T_{i-1}$ excepto para $i = 1$, claro, donde $T_{in,1} \equiv T_{in}$.

El objetivo será determinar la dinámica que rige a $T_i$; en concreto, la temperatura de salida será $T_N$.

## Ecuación en derivadas parciales (elemento infinitesimal)

De hecho, si la ecuación de cada elemento $\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{V}F(T - T_{in}) - \frac{\kappa}{V\rho C_e}T + \frac{Q}{V\rho C_e}$ la reescribimos pensando en $T(x, t)$, y que en cada elemento $T_{in} = T(x, t)$, $T = T(x + dx, t)$, $Q = \bar{Q}dx$, $V = Sdx$, $\kappa = \bar{\kappa}dx$, siendo $\bar{Q}$ la potencia por metro generada por la resistencia, $\bar{\kappa}$ las pérdidas por metro lineal, y $S$ la sección, tenemos:

resulta

$$\frac{\partial T(x + dx, t)}{\partial t} = -\frac{1}{Sdx}F(T(x + dx, t) - T(x, t)) - \frac{\bar{\kappa}dx}{Sdx\rho C_e}T(x + dx, t) + \frac{\bar{Q}dx}{Sdx\rho C_e}$$

simplificando $dx$, donde se puede:

$$\frac{\partial T(x + dx, t)}{\partial t} = -\frac{1}{S}F\,\frac{T(x + dx, t) - T(x, t)}{dx} - \frac{\bar{\kappa}}{S\rho C_e}T(x + dx, t) + \frac{\bar{Q}}{S\rho C_e}$$

con lo que haciendo tender a cero $dx$ cuando el número de elementos tiende a infinito, llegamos a la ecuación en derivadas parciales (EDP):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{S}F\,\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\bar{\kappa}}{S\rho C_e}T + \frac{\bar{Q}}{S\rho C_e}$$

**Interpretación:** EDP que define la relación entre las derivadas temporales $\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$ y espaciales $\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$ de la temperatura y las entradas $F$ y $\bar{Q}$. La entrada $T_{in}$ aparentemente ha desaparecido de la EDP, pero no lo ha hecho: se ha transformado en una "condición de contorno", dado que debe forzosamente ser $T(0, t) = T_{in}(t)$.

## Casos particulares:

### Transporte

Por ejemplo, con $\bar{Q} = 0$ y $\bar{\kappa} = 0$ se reduce a la ecuación del "retardo de transporte" (transporte convectivo) dada por $\frac{\partial T}{\partial t} = -v\frac{\partial T}{\partial x}$, siendo $v = \frac{F}{S}$ la velocidad lineal de ese transporte.

### Intercambiador en equilibrio

Otra ecuación muy conocida es el caso estacionario (equilibrio), con $\bar{Q} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, donde si es "constante en el tiempo" la llamaremos a la solución $T_{eq}(x)$, y resulta $\frac{\partial T_{eq}}{\partial x} = -\frac{\bar{\kappa}}{F\rho C_e} T_{eq}$, que es una ecuación diferencial ordinaria (hemos eliminado las derivadas temporales), y da las curvas exponenciales de los intercambiadores en equilibrio:

$$T_{eq}(x) = T_{in} \cdot e^{\frac{-\bar{\kappa}}{F\rho C_e} \cdot x}$$