

Linealización alrededor de trayectorias

Antonio Sala

Notas sobre control de sistemas complejos

DISA – Universitat Politècnica de València

Presentación en vídeo en: <http://personales.upv.es/asala/YT/V/ltray.html>



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Introducción

Motivación:

En algunas aplicaciones se debe “repetir” una cierta trayectoria nominal.

Objetivos:

Generalizar el concepto de linealización a “trayectorias” de funcionamiento en vez de puntos de funcionamiento constantes.

Contenidos:

Revisión de linealización en punto de operación constante. Generalización a trayectoria. Discusión.



Revisión linealización sistema dinámico en PF constante

Consideremos un sistema $\dot{x} = f(x, u)$, del que se conoce un punto de equilibrio $0 = f(x_{eq}, u_{eq})$.

Con cambio de variable incremental $\Delta x(t) := x(t) - x_{eq}$,
 $\Delta u(t) := u(t) - u_{eq}$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Delta x}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \frac{dx_{eq}}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x_{eq} + \Delta x, u_{eq} + \Delta u) \\
 &\approx f(x_{eq}, u_{eq}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_{eq}, u_{eq})} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_{eq}, u_{eq})} \Delta u \\
 &= 0 + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_{eq}, u_{eq})}}_A \Delta x + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_{eq}, u_{eq})}}_B \Delta u
 \end{aligned}$$

Aproximación de la respuesta

La solución de $\frac{d\Delta x}{dt} = A\Delta x + B\Delta u$ aproxima los incrementos de x cuando Δu no es cero o las condiciones iniciales se desvían “poco” del equilibrio, y se conoce como modelo linealizado.

A y B son matrices constantes (matriz de derivadas parciales, Jacobiano).

Si $\Delta u(t)$ es pequeño y $\Delta x(0)$ también (y A es estable, o Δu es la salida de un control estabilizante, para que $\Delta x(t)$ también sea pequeño) entonces:

La salida $x(t)$ del sistema no lineal $\dot{x} = f(x, u)$ ante $u = u_{eq} + \Delta u(t)$ es muy cercana a $x_{lin}(t) = x_{eq} + \Delta x(t)$



Linealización alrededor de una trayectoria

Supongamos que existe una entrada $u_{ref}(t)$, y trayectoria de estado $x_{ref}(t)$ conocidos, tal que $\frac{dx_{ref}}{dt} = f(x_{ref}, u_{ref})$, donde ahora posiblemente $\dot{x}_{ref} \neq 0$.

Con cambio de variable incremental $\Delta x(t) := x(t) - x_{ref}(t)$, $\Delta u(t) := u(t) - u_{ref}(t)$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \frac{dx_{ref}}{dt} = f(x_{ref}(t) + \Delta x(t), u_{ref}(t) + \Delta u(t)) - f(x_{ref}(t), u_{ref}(t)) \\ &\approx f(x_{ref}(t), u_{ref}(t)) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{(x_{ref}(t), u_{ref}(t))}}_{A(t)} \Delta x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_{(x_{ref}(t), u_{ref}(t))}}_{B(t)} \Delta u - f(x_{ref}(t), u_{ref}(t)) \\ &= A(t) \Delta x + B(t) \Delta u \end{aligned}$$

Aproximación

El modelo linealizado en variables incrementales $\frac{d\Delta x}{dt} = A(t)\Delta x + B(t)\Delta u$ es un sistema **lineal variante en el tiempo** que modela las desviaciones sobre la trayectoria ante pequeñas desviaciones de la entrada o condiciones iniciales.

$A(t)$ y $B(t)$ son matrices **NO** constantes.

Si $\Delta u(t)$ es pequeño (y $A(t)$ es estable, o Δu es la salida de un control estabilizante, para que $\Delta x(t)$ también sea pequeño) entonces:

La salida $x(t)$ del sistema no lineal $\dot{x} = f(x, u)$ ante $u = u_{ref}(t) + \Delta u(t)$ es muy cercana a $x_{ref}(t) + \Delta x(t)$



Discusión

- La trayectoria de referencia puede ser generada:
 - Por **demostración**: una simulación, un operador humano, un prototipo o una prueba/calibración supervisada sobre la planta generan el experimento a replicar.
 - Por **inversión**: a partir de $y_{deseada}(t)$ se calculan sus derivadas y se despeja $u_{ref}(t)$ sobre el modelo no lineal*.
 - Ejemplo: sistemas mecánicos, a partir de posiciones deseadas se calculan velocidades y aceleraciones deseadas y, de estas últimas, la fuerza/par motor a aplicar.
- El caso de *punto de equilibrio constante* es un caso particular.

*Obviamente, eso también puede realizarse en modelos lineales (de fase mínima), siendo recomendado para seguir trayectorias con poco error. En muchos casos no-lineales donde la inversión arriba mencionada es posible, existen otras técnicas de control no lineal (flatness, linealización *exacta* por realimentación) que podrían obtener mejores resultados que esta linealización aproximada. Estas técnicas no son objeto de este material.

Conclusiones

- La linealización **invariante en el tiempo** $d\Delta x/dt = A\Delta x + B\Delta u$ alrededor de un punto de operación **constante** (equilibrio) puede generalizarse a una “**trayectoria nominal**” alrededor de la cual vaya a funcionar un proceso.
- El resultado es una linealización con **parámetros variantes en el tiempo** $d\Delta x/dt = A(t)\Delta x + B(t)\Delta u$ (salvo que el proceso original ya fuera lineal, claro).
- La *teoría* de estabilidad/control de *sistemas lineales variantes en el tiempo* es más compleja que la de sistemas lineales **invariantes** en el tiempo.