

Linealización alrededor de trayectorias: otras consideraciones

Antonio Sala

Notas sobre control de sistemas complejos

DISA – Universitat Politècnica de València

Presentación en vídeo en: <http://personales.upv.es/asala/YT/V/ltr2.html>



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Introducción

Motivación:

En bastantes aplicaciones se debe “converger” a una cierta trayectoria nominal no constante. Ello motiva la linealización alrededor de “trayectorias” de funcionamiento.

Objetivos:

Discusión de aplicaciones, relación con otros enfoques y requerimientos de control.

Contenidos:

Revisión de linealización alrededor de trayectoria. Relación con control con 2 grados de libertad; relación con filtro de Kalman extendido. Consideraciones para control.

Linealización alrededor de una trayectoria

Supongamos que existe una entrada $u_{ref}(t)$, y trayectoria* de estado $x_{ref}(t)$ conocidos, tal que $\frac{dx_{ref}}{dt} = f(x_{ref}, u_{ref})$.

Con cambio de variable incremental $\Delta x(t) := x(t) - x_{ref}(t)$, $\Delta u(t) := u(t) - u_{ref}(t)$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \frac{dx_{ref}}{dt} = f(x_{ref}(t) + \Delta x(t), u_{ref}(t) + \Delta u(t)) - f(x_{ref}(t), u_{ref}(t)) \\ &\approx \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_{ref}(t), u_{ref}(t))}}_{A(t)} \Delta x + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_{ref}(t), u_{ref}(t))}}_{B(t)} \Delta u = A(t) \cdot \Delta x + B(t) \cdot \Delta u \end{aligned}$$

Aplicaciones ejemplo

- **robótica**, para control de robots que se desvían ligeramente de una trayectoria planificada debido a desviaciones en pose inicial, perturbaciones y errores de modelado (diferencias de carga, deslizamiento de ruedas, ...).
- **Procesos por lotes** (p. ej. reacciones químicas donde se pretende replicar un determinado perfil de temperatura y composición en función del tiempo: el modelo linealizado cambia según la fase de la reacción).

Relación con “control con 2 grados de libertad”

- Generar trayectorias de referencia en entrada y salida está muy relacionada con el **control con dos grados de libertad** (2GL):

Dado modelo lineal $y = Gu$, el control

$$u_{ref} = G^{-1}M \cdot r, \quad y_{ref} = M \cdot r$$

$$\Delta y = y - y_{ref}, \quad \Delta u = K(s) \cdot \Delta y, \quad u = u_{ref} + \Delta u$$

produce una salida $y_{ref} = Gu_{ref} = Mr$ si no hay perturbaciones/error de modelado ($\Delta y = 0$, $y = G(G^{-1}Mr) = Mr$).

- M se denomina “**modelo de referencia**”.

Las perturbaciones/error de modelado producen $\Delta y \neq 0$ que el regulador $K(s)$ trata de compensar. El término $G^{-1}M$ se denomina componente “feedforward” y $K(s)$ es el componente “feedback”.

Obtención de entrada y trayectoria de referencia

Normalmente $y_{ref}(t)$ viene dada (es una salida objetivo, referencia para control).

- Obtener $u_{ref}(t)$ en el caso lineal es “fácil”: $u_{ref} = G^{-1}Mr$, aunque entonces no se necesita “linealizar” y es control 2GL “clásico”.
- Obtener $u_{ref}(t)$ en el caso NO lineal es más difícil:
 - Por inversión de la dinámica: $\dot{y} = -\sin(y) + u \Rightarrow u_{ref} = \sin(y_{ref}) + \frac{dy_{ref}}{dt}$.
 - Por “demostración”: un operario o experimento con éxito se hizo con (u_{ref}, y_{ref}) .

Control linealizado alrededor de trayectorias

Diseño de controladores que converjan a la trayectoria deseada:

- **control lineal robusto**, invariante en el tiempo, que tolere todas las variaciones de $A(t)$ y $B(t)$ como si fueran “errores de modelado” alrededor de unos “valores medios” $\bar{A}$, $\bar{B}$. Por ejemplo, una realimentación del estado $\Delta u = -K \cdot \Delta x$, $u = u_{ref}(t) - K \cdot \Delta x$ [Control 2 grados de libertad].
- Control por **planificación de ganancia**, que utilice unos parámetros del regulador que vayan cambiando según lo vayan haciendo A y B . Por ejemplo, $\Delta u = -K(A, B) \cdot \Delta x$ con ganancia dependiendo de los coeficientes de las matrices.



Control linealizado alrededor de trayectorias

Diseño de controladores que converjan a la trayectoria deseada:

- **control lineal robusto**, invariante en el tiempo, que tolere todas las variaciones de $A(t)$ y $B(t)$ como si fueran “errores de modelado” alrededor de unos “valores medios” $\bar{A}$, $\bar{B}$. Por ejemplo, una realimentación del estado $\Delta u = -K \cdot \Delta x$, $u = u_{ref}(t) - K \cdot \Delta x$ [Control 2 grados de libertad].
- Control por **planificación de ganancia**, que utilice unos parámetros del regulador que vayan cambiando según lo vayan haciendo A y B . Por ejemplo, $\Delta u = -K(A, B) \cdot \Delta x$ con ganancia dependiendo de los coeficientes de las matrices.
- Control **variante en el tiempo**, que utilice unos parámetros del regulador que tengan en cuenta valores actuales y futuros de A y B . Por ejemplo, $\Delta u = -K(t)\Delta x$.
 - La implementación suele ser con **control predictivo** (se usan referencias futuras y modelos linealizados futuros).



Control linealizado alrededor de trayectorias

Diseño de controladores que converjan a la trayectoria deseada:

- **control lineal robusto**, invariante en el tiempo, que tolere todas las variaciones de $A(t)$ y $B(t)$ como si fueran “errores de modelado” alrededor de unos “valores medios” $\bar{A}$, $\bar{B}$. Por ejemplo, una realimentación del estado $\Delta u = -K \cdot \Delta x$, $u = u_{ref}(t) - K \cdot \Delta x$ [Control 2 grados de libertad].
- Control por **planificación de ganancia**, que utilice unos parámetros del regulador que vayan cambiando según lo vayan haciendo A y B . Por ejemplo, $\Delta u = -K(A, B) \cdot \Delta x$ con ganancia dependiendo de los coeficientes de las matrices.
- Control **variante en el tiempo**, que utilice unos parámetros del regulador que tengan en cuenta valores actuales y futuros de A y B . Por ejemplo, $\Delta u = -K(t)\Delta x$.
 - La implementación suele ser con **control predictivo** (se usan referencias futuras y modelos linealizados futuros).

Relación con Filtro de Kalman Extendido

- **Observador** que usa la linealización sobre la trayectoria **presente** (y pasada) para obtener el estimado del estado en un proceso no lineal.

Dado $x_+ = f(x, u, w)$, $y = g(x, v)$, donde w, v son ruidos de media cero, el Filtro de Kalman Extendido programa un Filtro de Kalman **no estacionario** para calcular L_k en:

$$\hat{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) + L_k \cdot (y_k - g(f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}), 0))$$

a partir de la linealización:

$$A_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\hat{x}_k, u_k)}, \quad C_k = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(\hat{x}_k, u_k)}$$

y de la linealización de los efectos de los ruidos w, v (detalles omitidos por brevedad), así como de un estimado de la matriz de vzas-covarianzas que se va propagando.

Conclusiones

- La linealización alrededor de una “**trayectoria nominal**” resulta en un sistema lineal variante en el tiempo $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ (vbles incrementales).
- Las aplicaciones en **robótica** y **procesos por lotes** son las más usuales.
- La *teoría de control de sistemas variantes en el tiempo* es más compleja que la de sistemas lineales invariantes en el tiempo.
- Aparte de la opción (obvia) de control no lineal, permite que técnicas lineales puedan usarse con la aproximación resultante:
 - Control Robusto,
 - Control con planificación de ganancia,
 - Variante en el tiempo (predictivo),
 - Filtro de Kalman extendido (observador).