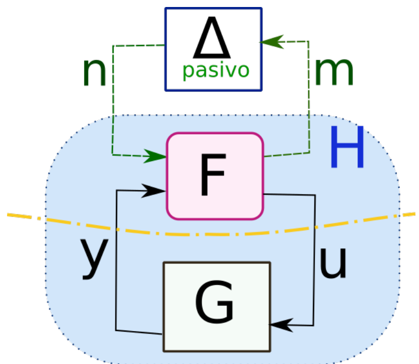
Pasividad + LFT: criterio del círculo

Presentación en vídeo: http://personales.upv.es/asala/YT/V/pascricir.html

Este código funcionó con Matlab `R2020a`

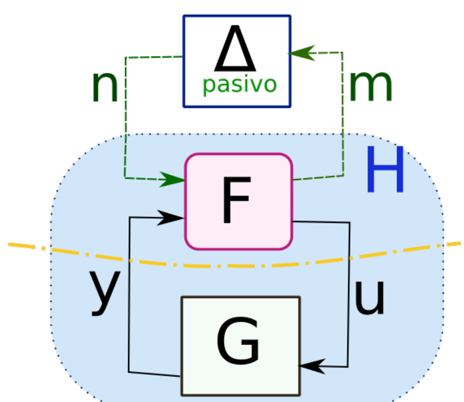
Objetivo: Dada la interconexión



evaluar cómo debe ser la respuesta en frecuencia de G para que la interconexión sea estable, para caso serie+paralelo de F.

Tabla de Contenidos

Revisión teórica



$$H = lft(F, G)$$

El Teorema de Pasividad dice que si Δ es estrictamente pasivo y $-H$ también (o estrict. output passive y observable), entonces la interconexión es estable. *(Nyquist de H en lado izquierdo del plano complejo, parte real negativa)*

Mirando únicamente la parte de abajo, $H = lft(F,G)$, $m = Hn$. Entonces $n = H^{-1}m$, con lo que se debe cumplir $u = lft(H^{-1},F)\cdot y$, esto es $G = (lft(H^{-1},F))^{-1}$.

Si $Re(H) < 0$, entonces $Re(H^{-1}) < 0$ -- en efecto, si $H = a + bj$ entonces

$$H^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} j .$$

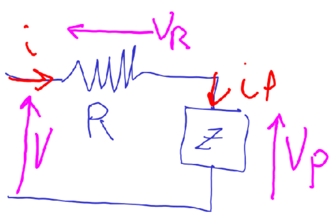
Si F *no* depende de la frecuencia (el caso F dinámico es más complicado), el lugar geométrico de la respuesta en frecuencia de G es:

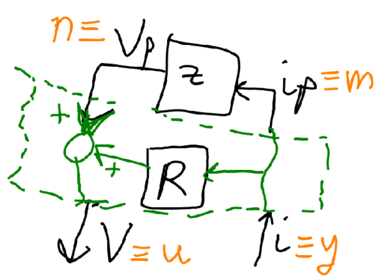
$$\bigcup_{\sigma>0,\gamma\in\mathbb{R}} \frac{1}{lft(-\sigma+\gamma j, F)}$$

Impedancias serie o paralelo

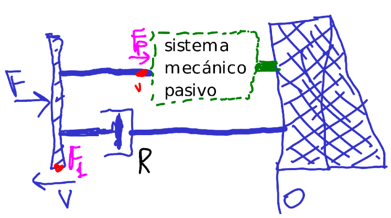
Caso 1: exceso de pasividad input

Ejemplo eléctrico: resistencia en serie con circuito pasivo.





Las mismas ecuaciones tiene el sistema mecánico [entrada v, salida F]:



$$F = F_1 + F_p,\ F_1 = Rv$$

$$m = y,\ u = n + \alpha y$$

Si $\int mn\, dt \geq 0$, entonces $\int uy\, dt = \int (n + \alpha y) y\, dt = \int (nm + \alpha y^2)\, dt \geq \alpha \int y^2\, dt$

```
alpha=3;
F_serie=[0 1;1 alpha];
dibujatodo(F_serie)
```

El valor de lft(F,G) es:
H =

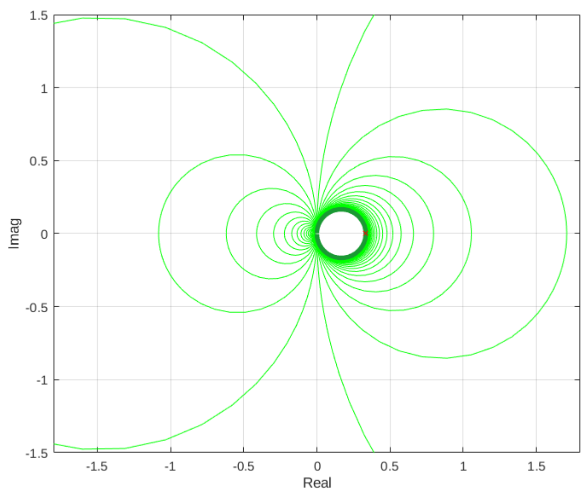
$$-\frac{G}{3\,G-1}$$

Por comprobar, inv(lft(1/H,F)) debe dar G:

ans = G

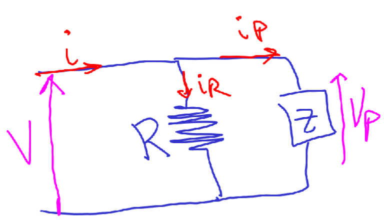
El semiplano izquierdo de H mapea a la zona verde

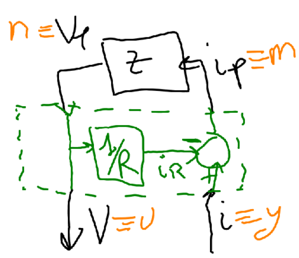
```
hold on, plot(1/alpha,0,'rx'), hold off, axis([-1.8 1.8 -1.5 1.5])
```



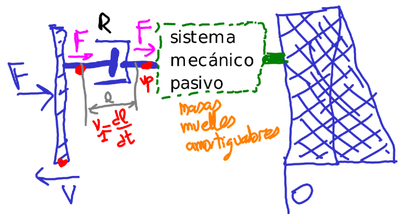
Caso 2, exceso de pasividad output

Ejemplo eléctrico: resistencia en paralelo con circuito pasivo.





Las mismas ecuaciones tiene el sistema mecánico [entrada v, salida F]:



$$v = v_1 + v_p,\ v_1 = F/R$$

En general, consideramos:

$$m = -\beta n + y,\ u = n$$

Si $\int mn\,dt \geq 0$, entonces $\int uy\,dt = \int n(m + \beta n)\,dt = \int (nm + \beta u^2)\,dt \geq \beta \int u^2\,dt$

```
beta=1/4;
F_paralelo=[-beta 1;1 0];
figure
dibujatodo(F_paralelo)
```

```
El valor de lft(F,G) es:
H =
```

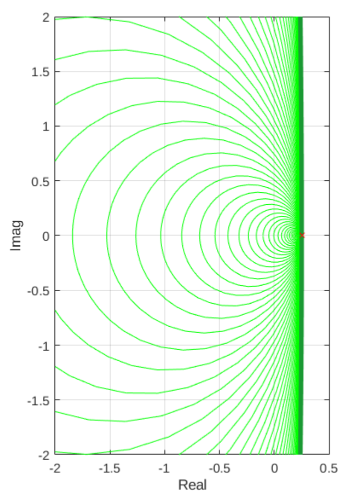
$$G - \frac{1}{4}$$

```
Por comprobar, inv(lft(1/H,F)) debe dar G:
```

ans = G

```
El semiplano izquierdo de H mapea a la zona verde
```

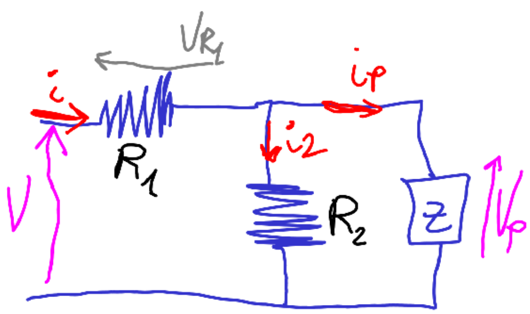
```
hold on, plot(beta,0,'rx'), hold off
axis([-2 0.5 -2 2])
```

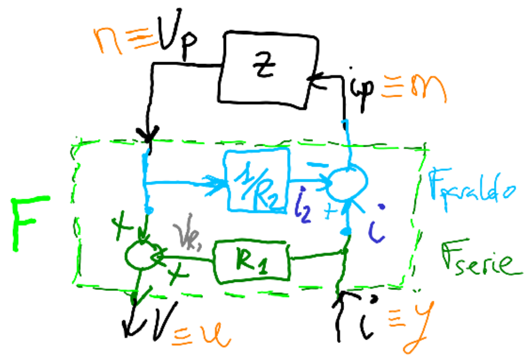


G debe ser estable.

Caso 3, exceso de pasividad input+output (simultáneo)

Consideremos la conexión:

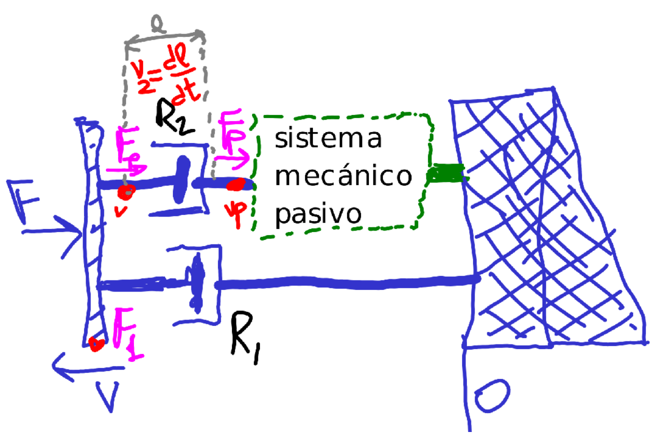




La impedancia resistiva (parte real) mínima es $R_{\min} = R_1$ cuando $z \to 0$, y la máxima es $R_{\max} = R_1 + R_2$ cuando $z \to \infty$.

El componente desconocido z puede ser lineal o no lineal, estático o dinámico, mientras sea pasivo.

Análogo mecánico: cambiando tensión a fuerza, intensidad a velocidad, tenemos $F = F_p + F_1$, $F_1 = R_1 v$, $F_p = R_2 v_2$, $v_2 + v_p = v$, siendo las velocidades entendidas como diferencia de velocidad entre extremos de los amortiguadores o del sistema mecánico pasivo desconocido. [entrada v, salida F]




```
Rmin=alpha, Rmax=1/beta+alpha
```

```
Rmin = 3
Rmax = 7
```

Definiendo: $$\beta = \frac{1}{R_2}, \qquad \alpha = R_1$$

El cambio de variable (LFT) será:

$$m=-\beta n+y\,,\; u=n+\alpha y$$

$$\begin{pmatrix} m \\ u \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ 1 & +\alpha \end{pmatrix}}_{F} \cdot \begin{pmatrix} n \\ y \end{pmatrix}$$

```
F=[-beta 1;1 alpha]
```

```
F = 2×2
   -0.2500    1.0000
    1.0000    3.0000
```

```
%es igual a
lft(F_paralelo,F_serie,1,1)
```

```
ans = 2×2
   -0.2500    1.0000
    1.0000    3.0000
```

Para calcular la disipación "input" (resistencia mínima) u "output" (conductancia mínima) podemos comprobar que, a partir de de $m=-\beta n+y\,,\; u=n+\alpha y$ tenemos:

$$\beta u^2+\alpha m^2=(\beta n^2+\beta\alpha^2y^2+2\beta\alpha ny)+(\alpha\beta^2n^2+\alpha y^2-2\alpha\beta ny)$$
$$=\beta n^2+\beta\alpha^2y^2+\alpha\beta^2n^2+\alpha y^2=(1+\alpha\beta)(\beta n^2+\alpha y^2)$$

Dividiendo por $1+\alpha\beta$:

$$\frac{\beta u^2+\alpha m^2}{1+\alpha\beta}=\alpha y^2+\beta n^2$$

Con lo cual:

$$mn=(y-\beta n)n=y(u-\alpha y)-\beta n^2=yu-\alpha y^2-\beta n^2=yu-\frac{\beta u^2+\alpha m^2}{1+\alpha\beta}$$

Con lo que, como $\int mn\,dt\geq 0$, tenemos:

$$\int uy\,dt\geq\alpha\int y^2\,dt+\beta\int n^2\,dt=\frac{\beta}{1+\alpha\beta}\int u^2\,dt+\frac{\alpha}{1+\alpha\beta}\int m^2\,dt$$

De modo que, ante una entrada fuente de intensidad, acotamos:

$$\int uy\,dt\geq\alpha\int y^2\,dt=R_1\int i^2\,dt$$

**el lado de la derecha es cuando $V_p=n=0$, z es un cortocircuito*

Ante una entrada fuente de tensión, acotamos:

$$\int uy\,dt \geq \frac{\beta}{1+\alpha\beta}\int u^2\,dt = \frac{1/R_2}{1+R_1/R_2}\int V^2\,dt = \frac{1}{R_1+R_2}\int V^2\,dt$$

**el lado de la derecha es cuando* $i_p = m = 0$, z *es un circuito abierto*

Estabilidad robusta

Pasemos a ver el lugar geométrico de la respuesta en frecuencia del sistema conectado al circuito para que el teorema de pasividad garantice estabilidad robusta:

```
figure
dibujatodo(F)
```

```
El valor de lft(F,G) es:
H =
```

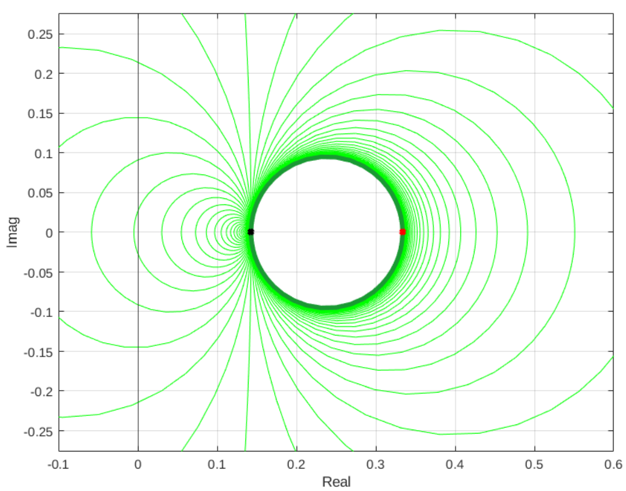
$$-\frac{G}{3\,G-1}-\frac{1}{4}$$

```
Por comprobar, inv(lft(1/H,F)) debe dar G:
```

ans = G

```
El semiplano izquierdo de H mapea a la zona verde
```

```
xline(0), xlim([-.1 .6])
hold on
plot(1/Rmin,0,'xr','LineWidth',3), plot(1/Rmax,0,'xk','LineWidth',3)
hold off
```



Criterio del círculo (realim +)

Si la respuesta en frecuencia de G está fuera del círculo cuyo diámetro está entre $1/R_{\max}$ y $1/R_{\min}$, y da tantas vueltas (antihorario) a ese círculo (bueno, criterio de Nyquist sólo dice a $+1/R_{min}$, pero no puede tocar el círculo) como polos inestables de G en bucle abierto, entonces el bucle G-F-Δ es estable.

Recuperamos casos anteriores cuando $\beta \to 0$ ($R_2 \to \infty$, circuito serie, caso 1, cruz "negra" hacia cero) o $\alpha \to 0$ ($R_1 \to 0$, circuito paralelo, caso 2, cruz "roja" hacia infinito).

*****En interconexión con realimentación negativa, el círculo sería en el lado izquierdo del plano complejo. También habría otras versiones del criterio del círculo si se hubiese considerado la entrada V y la salida i.

Conclusiones

El criterio del círculo es un resultado famoso históricamente que generaliza el criterio de Nyquist (dar vueltas a un "punto" -1 o +1, según signo de realimentación) a dar vueltas a un círculo ante determinada configuración de pasividad expresable como LFT... Su analogía eléctrica es el circuito serie-paralelo; existe también una analogía mecánica.

Como corolario, si z es una no-linealidad de primer y tercer cuadrante (estático), el resultado son no-linealidades con ganancia entre R_{min} y R_{max} (no-linealidad de sector).

Nota: si $R_{max} < \infty$, el criterio del círculo también se puede demostrar a partir del teorema de pequeña ganancia si $\beta > 0$, asumiendo como hipótesis de partida que $\widetilde{\Delta} = \dfrac{\Delta - R_{med}}{\rho}$ es contractivo, siendo $R_{med} = \dfrac{1}{2}(R_{max} + R_{min})$, $\rho = \dfrac{1}{2}(R_{max} - R_{min})$. Dicha derivación a partir de pequeña ganancia no entra en los objetivos de este material.

Funciones auxiliares

```
function dibujatodo(F)
disp('El valor de lft(F,G) es:')
H=lft(F,sym('G'))
disp('Por comprobar, inv(lft(1/H,F)) debe dar G:')
simplify(inv(lft(1/H,F)))
regrid=fliplr(logspace(-2.5,2,65));
imgrid=logspace(-3,2.5,65);
imgrid=[-fliplr(imgrid) 0 imgrid];
Nr=length(regrid);
Ir=length(imgrid);
```

```
disp('El semiplano izquierdo de H mapea a la zona verde')
for rek=1:Nr
    partereal=-regrid(rek);
    gr=[];
    for imk=1:Ir
        parteim=imgrid(imk);
        lG=1/lft(partereal+j*parteim,F);
        gr=[gr lG];
        if(rek==Nr)
            plot(gr,'Color',[0.1 .6 0.2],'LineWidth',4)
        else
            plot(gr,'g')
            if(rek==1)
                hold on
            end
        end
    end
end
hold off
axis equal
grid on
xlabel('Real'), ylabel('Imag')
end
```