Efecto de los ceros de la FdT en la respuesta de un sistema SISO

Presentaciones en vídeo (YouTube):

-- http://personales.upv.es/asala/YT/V/zeros1.html

-- http://personales.upv.es/asala/YT/V/zerosgr.html

-- http://personales.upv.es/asala/YT/V/zerosord2.html

Este código funcionó sin errores en Matlab `R2023b (Linux)`

Objetivo: discutir el efecto de los ceros (raíces del numerador de la FdT) en la respuesta (nos centramos en escalón) de los sistemas dinámicos. Concepto de "ceros" y "grado relativo".

Tabla de Contenidos

Introducción/motivación

Lo teóricamente importante en la respuesta de un sistema $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ son los POLOS, raíces de $D(s)$...

la respuesta del sistema se puede descomponer en una suma de exponenciales asociadas a cada POLO. Determinan estabilidad, tiempo de establecimiento, frecuencia de oscilaciones...

$$G(s) = \frac{M_1}{s+p_1} + \frac{M_2}{s+p_2} + \ldots$$

$$Y(s) = G(s)u(s) = \frac{M_1}{s+p_1}u(s) + \frac{M_2}{s+p_2}u(s) + \ldots$$

Según los valores de M_1 y M_2, $G(s)$ tendrá un numerador u otro... pero lo que se "ve" son los POLOS.

¿Entonces, por qué hablar de las raíces del numerador (ceros)?

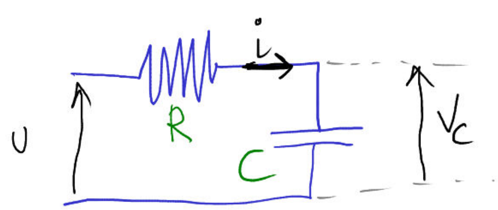
- Los "ceros" (raíces de $N(s)$) tienen su importancia en "control" porque para hacer que un sistema $G(s)$ se comporte como un modelo "deseado" $M(s)$ entonces la entrada deberá ser filtrada por $Q(s) = M(s)G^{-1}(s)$, para que $G(s)Q(s) = M(s)$. Por lo tanto, las raíces del "numerador del proceso" deberían estar en el "denominador del filtro/controlador/parámetro $Q(s)$". De todos modos, el detalle NO es objetivo de este material, ya se verá cuando lleguen temas de "control" (IMC en concreto).

- Dejando el control aparte, multiplicar por s es "derivar"... por tanto, la respuesta de $G(s) = G_1(s) \cdot (\rho s + 1)$ tendrá que ver con "añadir ρ veces la derivada, la velocidad" y esta interpretación da lugar a modificaciones en la respuesta temporal se gaste o no para control... El efecto de los ceros serán modificaciones "a los coefs. que multiplican las exponenciales de los POLOS"... que se verán de cierta forma en la respuesta (escalón, por brevedad) de los sistemas típicos de primer y segundo orden, por ejemplo.

Ceros en el origen: derivador puro

Si tengo un sistema $G_1(s) = \dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}$ la respuesta (ante c.i. nulas) de $G(s) = sG_1(s) = \dfrac{sN_1(s)}{D_1(s)}$ ante cualquier entrada es la DERIVADA de la respuesta de G_1; claro, multiplicar por s en el dominio de Laplace es derivar en el dominio del tiempo.

Ejemplo 1:

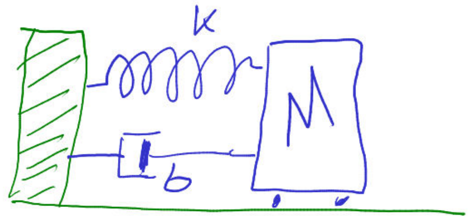


Intensidad en red RC ante condiciones iniciales nulas

$$V_c(s) = \frac{1}{RCs+1}u(s), \quad i(s) = \frac{u(s) - V_c(s)}{R} = \frac{Cs}{RCs+1}u(s) = \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}}u(s)$$

La intensidad es, en efecto $C\dfrac{dV}{dt}$... en Laplace $Cs \cdot \dfrac{1}{RCs+1}u(s)$, como ya sabíamos por Física, claro, es la ecuación básica fundamental del condensador.

Ejemplo 2: masa-muelle-amortiguador, la FdT de la velocidad:




```
k=1;M=1;b=1;
A=[0 1;-k/M -b/M]; B=[0;1/M];
C=eye(2);D=[0;0];
sys=ss(A,B,C,D);
tf(sys)
```

```
ans =

  From input to output...
             1
   1:  -----------
       s^2 + s + 1

             s
   2:  -----------
       s^2 + s + 1

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

Ganancia estática de sistemas con cero en el origen

Todo sistema con cero en el origen tiene ganancia estática cero $G(0) = 0$. Interpretación física: la intensidad en CC acaba siendo cero, la velocidad del muelle en equilibrio es cero, etc.

Ceros NO en el origen

La salida de $G(s) = (1 + \rho s) \cdot G_1(s)$ ante cualquier entrada será la salida de $G_1(s)$ ante la misma entrada + ρ veces la derivada de dicha salida.

Si $\rho < 0$ el sistema es de "fase no mínima", inicialmente tiene respuesta "inversa" (ejemplos luego).

Grado relativo de una FdT

*Un sistema en función de transferencia, $G(s)$, es "***realizable***" si tiene número de POLOS mayor o igual que CEROS; realizable implica que existen A,B,C,D tal que se puede construir una representación interna $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ tal que la FdT entre y y u es $G(s)$.

El *grado relativo* de una FdT $G(s)$ es la diferencia $m := n_{polos} - n_{ceros}$; siempre $m \geq 0$ si $G(s)$ es realizable, claro.

- $\dfrac{1}{s+1}$ es de grado relativo 1,

- $\dfrac{1}{s^2+2s+1}$ es de grado relativo 2,
- $\dfrac{(s+1)}{(s+3)^2(s+4)^2}$ es de grado relativo 3.

Analicemos la influencia del grado relativo en la respuesta escalón y en frecuencia, comenzando por grado relativo CERO.

Sistema de de grado relativo 0

El efecto ante escalón es de un salto brusco, "instantáneo" en la salida.

La FdT supone "condiciones iniciales 0" entendiendo que $y(t) = y'(t) = y''(t) = \ldots = 0$ para $t < 0$, incluso infinitesimalmente cerca de cero POR LA IZQUIERDA... pero cuando llega un escalón $u(t) = 1 \ \ \forall\, t \geq 0$, entonces puede haber "saltos bruscos" de cosas (posiciones, velocidades, aceleraciones...); esos saltos dependen del "grado relativo".

Si tengo $G(s) = N(s)/D(s)$, y N y D son del mismo grado (grado relativo = 0, diferencia grado den - grado num), entonces podemos "dividir" y obtener un "resto" de menor grado relativo.

Ejemplo:

$$\frac{2s+1}{s+4} = 2 + \frac{-7}{s+4}$$

La respuesta escalón, por tanto, será: $\dfrac{2}{s} - \dfrac{9}{s(s+4)}$, que incorpora el salto "brusco" de 2 unidades constantes + la respuesta escalón de un primer orden estándard $\dfrac{2.25}{0.25s+1}$.

```
syms s t
G=(2*s+1)/(s+4);
partfrac(G)
```

ans =

$$2 - \frac{7}{s+4}$$

```
y_step(t)=ilaplace(G*1/s)
```

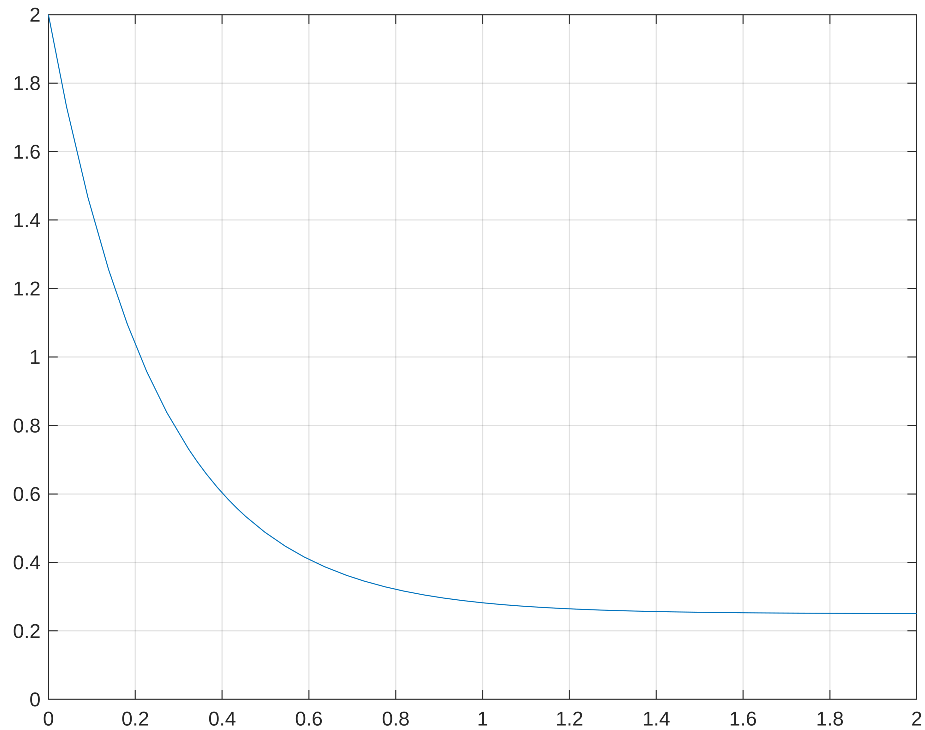
y_step(t) =

$$\frac{7\,e^{-4\,t}}{4} + \frac{1}{4}$$

```
y_step(0)
```

ans = 2

```
fplot(y_step,[0 2]), grid on, ylim([0 2])
```



En este segundo ejemplo, $\frac{0.3s+1}{0.6s+1} = 0.5 + \frac{0.5}{0.6s+1}$, la resp. escalón comenzará "bruscamente" subiendo 0.5 unidades.

Veamos un tercer ejemplo:

```
G=(1.2*s^2+3*s+2)/(s+3)^2
```

G =

$$\frac{\frac{6\,s^2}{5}+3\,s+2}{(s+3)^2}$$

```
partfrac(G)
```

ans =

$$\frac{19}{5\,(s+3)^2}-\frac{21}{5\,(s+3)}+\frac{6}{5}$$

```
y_step(t)=ilaplace(G*1/s); %resp. escalon symbolic toolbox
vpa(y_step(0))
```

```
ans = 1.2
```

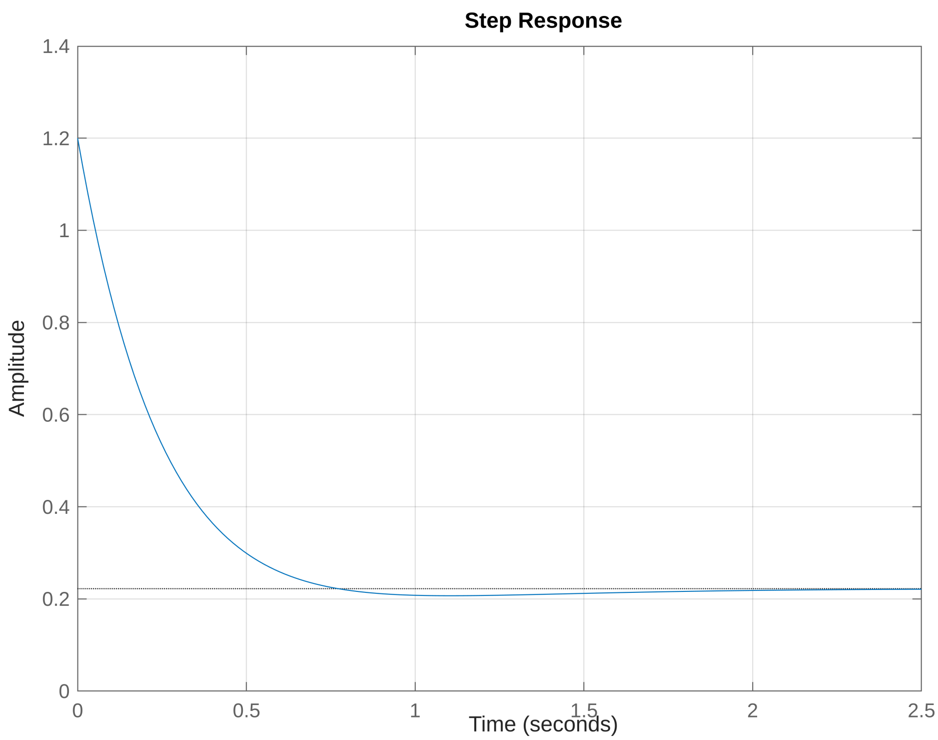
```
G=tf([1.2 3 2],[1 6 9])
```

```
G =

  1.2 s^2 + 3 s + 2
  -----------------
    s^2 + 6 s + 9

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
step(G), grid on %resp. escalón control toolbox
ylim([0 1.4])
```



El término constante de la desc. fracciones simples es la "***ganancia instantanea***" (proporcionalidad sin dinámica en los instantes iniciales), y coincide con $\lim_{s\to\infty} G(s)$, o con la "D" de la respresentación interna normalizada $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$.

```
ss(G)
```

```
ans =

  A =
           x1     x2
   x1      -6  -2.25
   x2       4      0
```

```
B =
     u1
 x1   2
 x2   0

C =
       x1    x2
 y1  -2.1  -1.1

D =
      u1
 y1  1.2

Continuous-time state-space model.
Model Properties
```

Sistema de de grado relativo 1

El efecto ante escalón es de un salto brusco, "instantáneo", en la VELOCIDAD.

En efecto $s \cdot G(s)$ tendrá grado relativo 0.

```
G=(3+s)/(s+2)^2
```

G =

$$\frac{s+3}{(s+2)^2}$$

```
y_step(t)=ilaplace(G/s)
```

y_step(t) =

$$\frac{3}{4} - \frac{t\,\mathrm{e}^{-2t}}{2} - \frac{3\,\mathrm{e}^{-2t}}{4}$$

```
y_step(0)
```

ans = 0

```
diff(y_step)
```

ans(t) = $\mathrm{e}^{-2t} + t\,\mathrm{e}^{-2t}$

```
v_step(t)=ilaplace((G*s)/s)
```

v_step(t) = $\mathrm{e}^{-2t} + t\,\mathrm{e}^{-2t}$

```
v_step(0)
```

ans = 1

La velocidad en t<0 es cero (cond. iniciales, infinitesimalmente cerca de cero), pero salta en cuanto actúa el escalón.

Sistema de de grado relativo m

El efecto ante escalón es de un salto brusco, "instantáneo" en la m-ésima derivada de la salida.

En efecto $s^m \cdot G(s)$ tendrá grado relativo 0.

Interpretación en "control": si la trayectoria no es la deseada, nuestra entrada podrá modificar la m-ésima derivada de la salida... Por ejemplo, grado relativo 2: no podrá modificar la salida directamente, ni su velocidad, tendremos capacidad de actuar sobre su aceleración.

```
G=(3+s)*(2*s+1)/(s+2)^4 %grado rel 2
```

G =

$$\frac{(2\,s+1)\;(s+3)}{(s+2)^4}$$

```
y_step(t)=ilaplace(G/s)
```

y_step(t) =

$$\frac{5\,t^2\,\mathrm{e}^{-2\,t}}{8}-\frac{3\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t}}{8}-\frac{3\,\mathrm{e}^{-2\,t}}{16}+\frac{t^3\,\mathrm{e}^{-2\,t}}{4}+\frac{3}{16}$$

```
y_step(0)
```

ans = 0

```
v_step=diff(y_step)
```

v_step(t) =

$$2\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t}-\frac{t^2\,\mathrm{e}^{-2\,t}}{2}-\frac{t^3\,\mathrm{e}^{-2\,t}}{2}$$

```
v_step(0)
```

ans = 0

```
a_step=diff(v_step)
```

a_step(t) =

$$2\,\mathrm{e}^{-2\,t}-5\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t}-\frac{t^2\,\mathrm{e}^{-2\,t}}{2}+t^3\,\mathrm{e}^{-2\,t}$$

```
a_step(t)=ilaplace((G*s^2)/s)
```

a_step(t) =

$$2\,e^{-2\,t} - 5\,t\,e^{-2\,t} - \frac{t^2\,e^{-2\,t}}{2} + t^3\,e^{-2\,t}$$

```
a_step(0) %empieza como una "parábola" cerca de t=0.
```

```
ans = 2
```

Grado relativo y respuesta en frecuencia

La respuesta en frecuencia $G(j\omega)$, cuando $\omega \to \infty$ tiende a $\frac{\kappa}{(j\omega)^m}$, siendo m el grado relativo, siendo κ cierta constante (ver ejemplo). El diagrama de Bode a altas frecuencias cae a $20m$ dB/década.

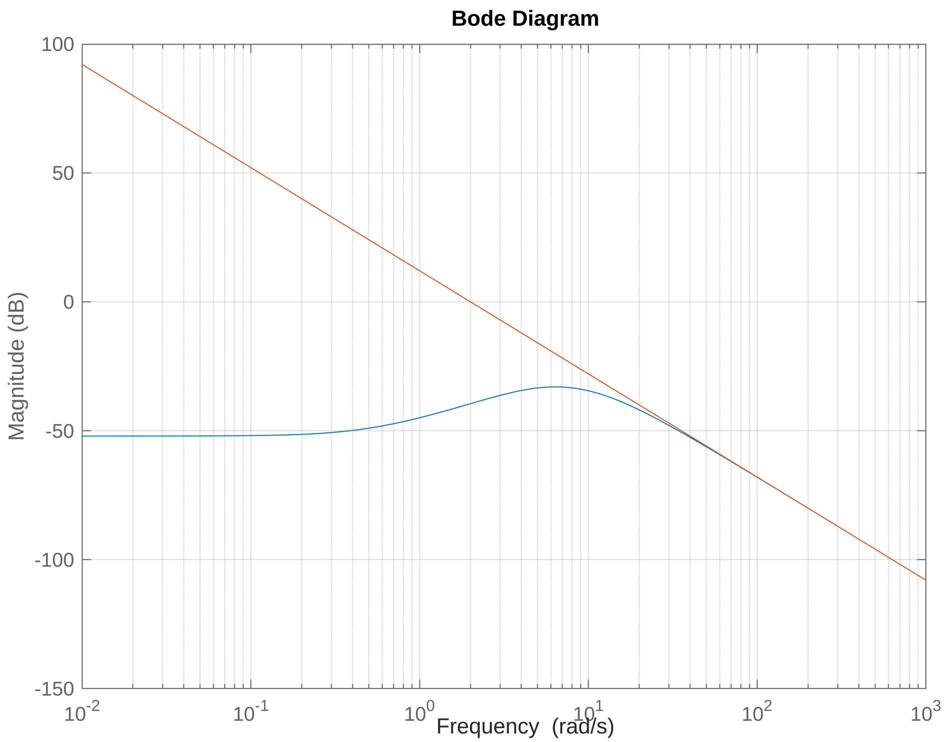
La "ganancia" o el "número de polos en el origen, tipo del sistema" da información de la respuesta del sistema ante señales *lentas* (*baja* frecuencia), el "grado relativo" da información de la respuesta del sistema ante señales *rápidas* (*alta* frecuencia).

```
s=tf('s');
G=(3+s)*(2+4*s)/(s+7)^4
```

```
G =
 
            4 s^2 + 14 s + 6
  --------------------------------------
  s^4 + 28 s^3 + 294 s^2 + 1372 s + 2401
 
Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

Cuando $s \to \infty$ entonces $G(s) \to 4/s^2$:

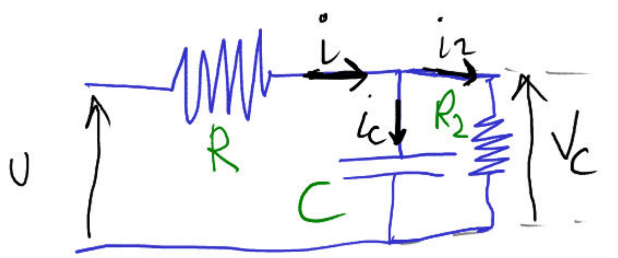
```
bodemag(G,4/s^2,logspace(-2,3,150)), grid on
```



Ejemplos adicionales grado relativo

Ejemplo físico grado relativo cero

Corriente absorbida en red RCR



$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C} i_c, \qquad i_c = i - i_2, \qquad i = \frac{1}{R} \cdot (u - V_c), \qquad i_2 = \frac{V_c}{R_2}$$

Modelo completo: 4 ecuaciones y 4 incógnitas (V_c, i, i_2, i_c), una entrada $u(t)$.

Operando:

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \left(-(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}) V_c + \frac{1}{R} u \right)$$

tenemos ec. de estado:

$$\frac{dV_c}{dt} = \quad -(\frac{1}{RC}+\frac{1}{R_2C})\cdot V_c \quad + \quad \frac{1}{RC}\cdot u$$

y ecuación de salida

$$i = -\frac{1}{R}V_c + \frac{1}{R}u$$

o sea, en Laplace:

$$V_c(s) = \frac{1/RC}{s+\frac{1}{RC}+\frac{1}{R_2C}}u(s) = \frac{R_2}{RR_2C\cdot s+(R+R_2)}u(s)$$

En régimen permanente CC ($s \to 0$), es el divisor de tensión $R_2/(R+R_2)$.

La intensidad será:

$$i = \frac{1}{R}(u - V_c(s)) = \frac{1}{R}(1 - \frac{1/RC}{s+\frac{1}{RC}+\frac{1}{R_2C}})u(s) = \frac{1}{R}\cdot\frac{s+\frac{1}{R_2C}}{s+\frac{1}{RC}+\frac{1}{R_2C}}\cdot u(s) = \frac{R_2C\cdot s+1}{RR_2C\cdot s+(R+R_2)}\cdot u(s)$$

O sea, en régimen permanente CC será $1/(R+R_2)\cdot u_{eq}$, como 2 resistencias en serie.

En régimen transitorio, en los primeros instantes con condensador descargado, $i(0) = \frac{1}{R}\cdot u(0)$, coincidente con D en la representación interna `ss(A,B,C,D)` y con $\lim_{s\to\infty} G(s)$ [tma. valor inicial, o que $\lim_{s\to\infty} C(sI - A)^{-1}B + D \quad = \quad D$].

Más ejemplos grado relativo

```
syms s
G=(1.5*s+18)/(s+3)^2 %grado relativo 1: salto brusco en velocidad ante
escalón de entrada
```

G =

$$\frac{\frac{3\,s}{2}+18}{(s+3)^2}$$

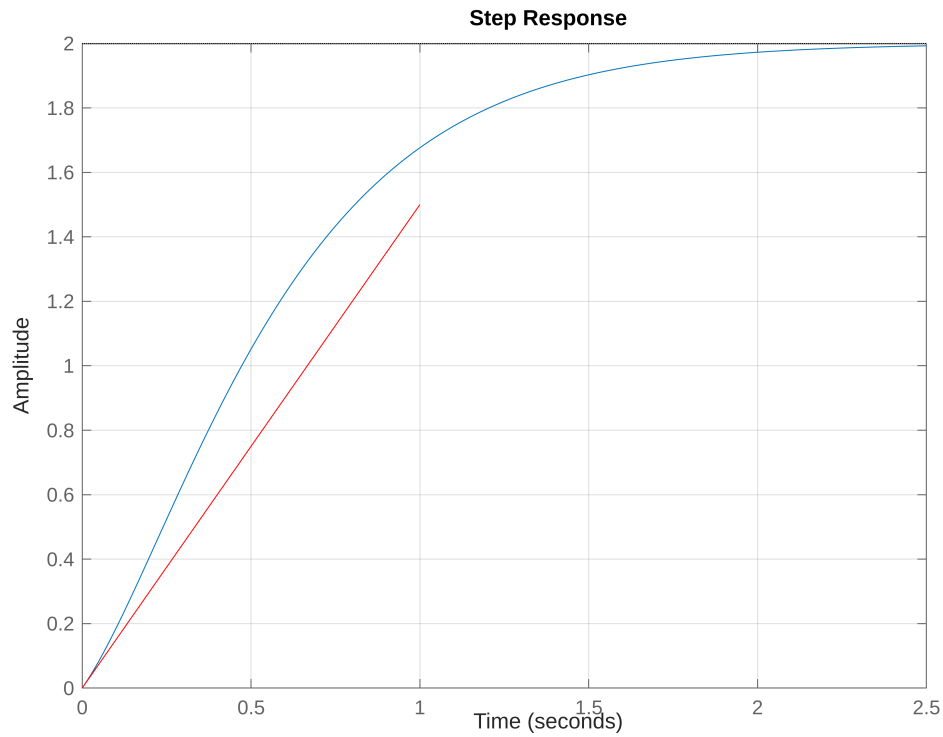
```
partfrac(G*s)
```

ans =

$$\frac{9}{s+3} - \frac{81}{2\,(s+3)^2} + \frac{3}{2}$$

```
step(tf([1.5 18],[1 6 9])), grid on
hold on
```

```
plot([0 1],[0 1.5],'r'), hold off, grid on
```

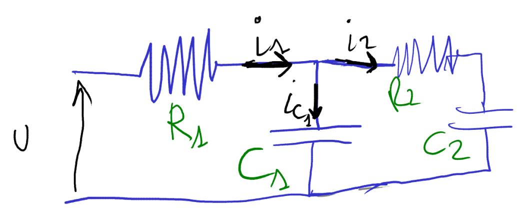


Ejemplo físico grado relativo 1, orden 1

Bueno, el V_c en el circuito RCR de arriba... y el sistema de primer orden clásico $K/(\tau s + 1)$. Ante un escalón, la velocidad cambia bruscamente, fórmulas usuales de respuesta 1er orden.

Ejemplo físico grado relativo 1, orden > 1

Consideremos el circuito RCRC de la figura:




```
syms Vc1 Vc2 R1 C1 R2 C2 i1 i2 u real
syms s
Model=[ s*Vc1==1/C1*(i1-i2); s*Vc2==1/C2*i2; i1==(u-Vc1)/R1; i2==(Vc1-
Vc2)/R2]
```

```
Model =
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Vc}_1\, s = \dfrac{i_1 - i_2}{C_1} \\ \mathrm{Vc}_2\, s = \dfrac{i_2}{C_2} \\ i_1 = -\dfrac{\mathrm{Vc}_1 - u}{R_1} \\ i_2 = \dfrac{\mathrm{Vc}_1 - \mathrm{Vc}_2}{R_2} \end{pmatrix}$$

```
sol=solve(Model,Vc1,Vc2,i1,i2);
```

Warning: Solutions are only valid under certain conditions. To include parameters and conditions in the solution, specify the 'ReturnConditions' value as 'true'.

```
collect(sol.Vc1/u,s) %grado relativo 1: escalón en "u" produce cambio
escalón instantáneo en dVc1/dt
```

ans =

$$\frac{(C_2\, R_2)\, s + 1}{(C_1\, C_2\, R_1\, R_2)\, s^2 + (C_1\, R_1 + C_2\, R_1 + C_2\, R_2)\, s + 1}$$

```
collect(sol.Vc2/u,s) %%grado relativo 2: escalón en "u" produce cambio
escalón instantáneo en d2Vc1/dt2
```

ans =

$$\frac{1}{(C_1\, C_2\, R_1\, R_2)\, s^2 + (C_1\, R_1 + C_2\, R_1 + C_2\, R_2)\, s + 1}$$

```
collect(sol.i1/u,s) %grado relativo 0: escalón en "u" produce cambio escalón
instantáneo en i1
```

ans =

$$\frac{(C_1\, C_2\, R_2)\, s^2 + (C_1 + C_2)\, s}{(C_1\, C_2\, R_1\, R_2)\, s^2 + (C_1\, R_1 + C_2\, R_1 + C_2\, R_2)\, s + 1}$$

```
collect(sol.i2/u,s) %grado relativo 1: escalón en "u" produce cambio escalón
instantáneo en di2/dt
```

ans =

$$\frac{C_2\, s}{(C_1\, C_2\, R_1\, R_2)\, s^2 + (C_1\, R_1 + C_2\, R_1 + C_2\, R_2)\, s + 1}$$

Ambas intensidades tienen un factor "s" en el numerador: cero en el origen; en equilibrio (CC) valen cero, como intuitivamente se esperaba.

Ejemplo: sistemas de 1er orden con cero adicional

Los sistemas de primer orden $\frac{K}{\tau s+1}$, con cero adicional en la forma $\frac{1}{z}(s+z)$, esto es, $(\frac{1}{z}s+1)$,

$G(s)=\dfrac{K\cdot(\frac{1}{z}s+1)}{\tau s+1}$, tienen mismo grado numerador y denominador y, por tanto, presentan, ante entrada escalón salto brusco $\frac{K}{z\tau}$ + dinámica exponencial.

Cuando $z\to\infty$ tiende al sistema de 1er orden "usual" sin ceros.

Simulemos un montón de valores de z para analizar gráficamente...

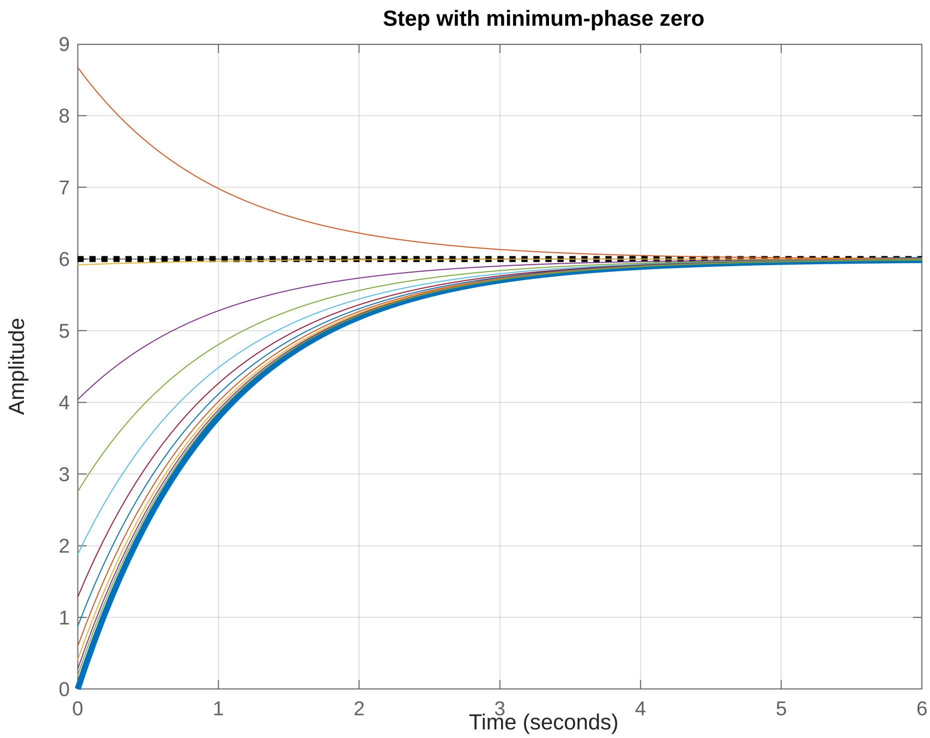
```
s=tf('s');
zl=logspace(-0.16,1.5,11)
```

```
zl = 1×11
    0.6918    1.0139    1.4859    2.1777    3.1915    4.6774    6.8549   10.0462 ···
```

```
N=length(zl);
G=cell(1,N);
G_fasenm=cell(1,N);
Gnozeros=6/(s+1);
for i=1:N
    G{i}=(s/zl(i)+1)*Gnozeros; %Fase mínima
    G_fasenm{i}=(-s/zl(i)+1)*Gnozeros; %fase no mínima
end
```

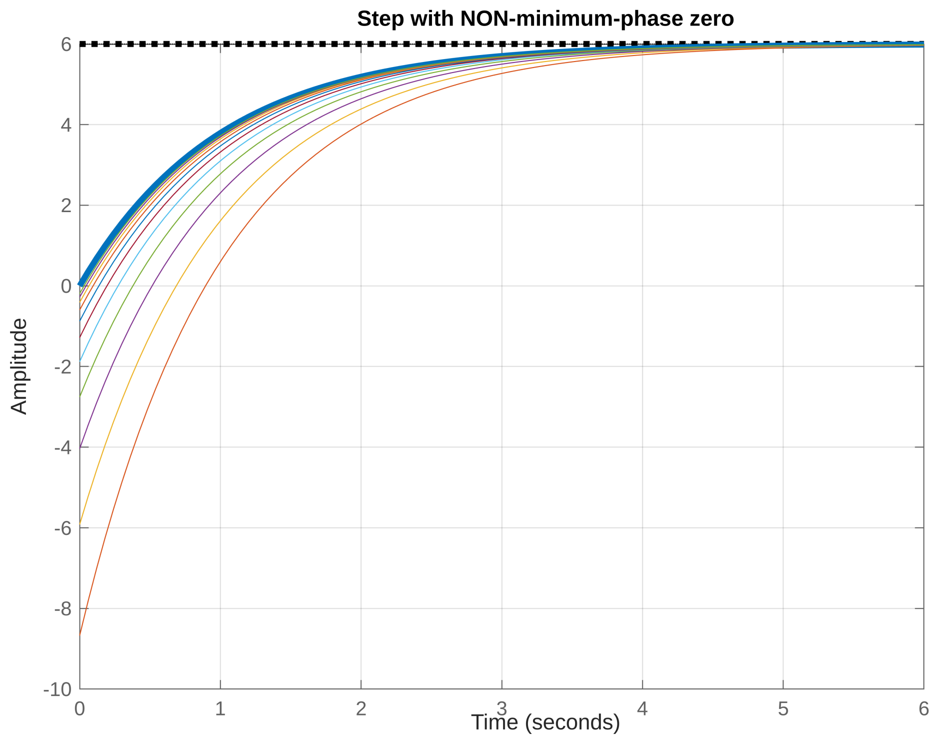
Simulación caso 1: $z>0$, fase mínima, ceros en semiplano izquierdo $-z$.

```
step(Gnozeros,6)
set(findall(gcf,'type','line'),'linewidth',3); %aumento grosor de linea "sin ceros"
hold on
step(G{:},6), grid on, hold off, title("Step with minimum-phase zero")
```



Simulación caso 2: $z < 0$**, fase no mínima, ceros en semiplano derecho**

```
step(Gnozeros,6)
set(findall(gcf,'type','line'),'linewidth',3);
hold on
step(G_fasenm{:},6), grid on, hold off, title("Step with NON-minimum-phase
zero")
```



Ejemplo: sistema subamortiguado orden 2 con cero adicional

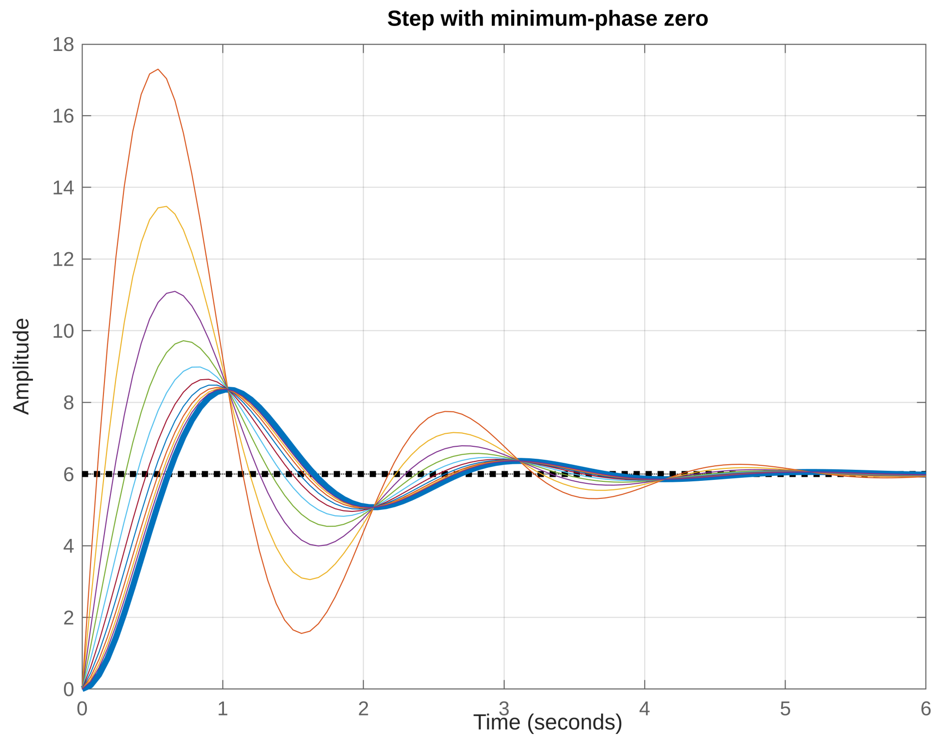
```
s=tf('s');
zl=logspace(-0,1.5,10)
```

```
zl = 1×10
    1.0000    1.4678    2.1544    3.1623    4.6416    6.8129   10.0000   14.6780 ⋯
```

```
N=length(zl);
G=cell(1,N);
G_fasenm=cell(1,N);
Gnozeros=60/(s^2+1.8*s+10);
for i=1:N
    G{i}=(s/zl(i)+1)*Gnozeros;
    G_fasenm{i}=(-s/zl(i)+1)*Gnozeros;
end
```

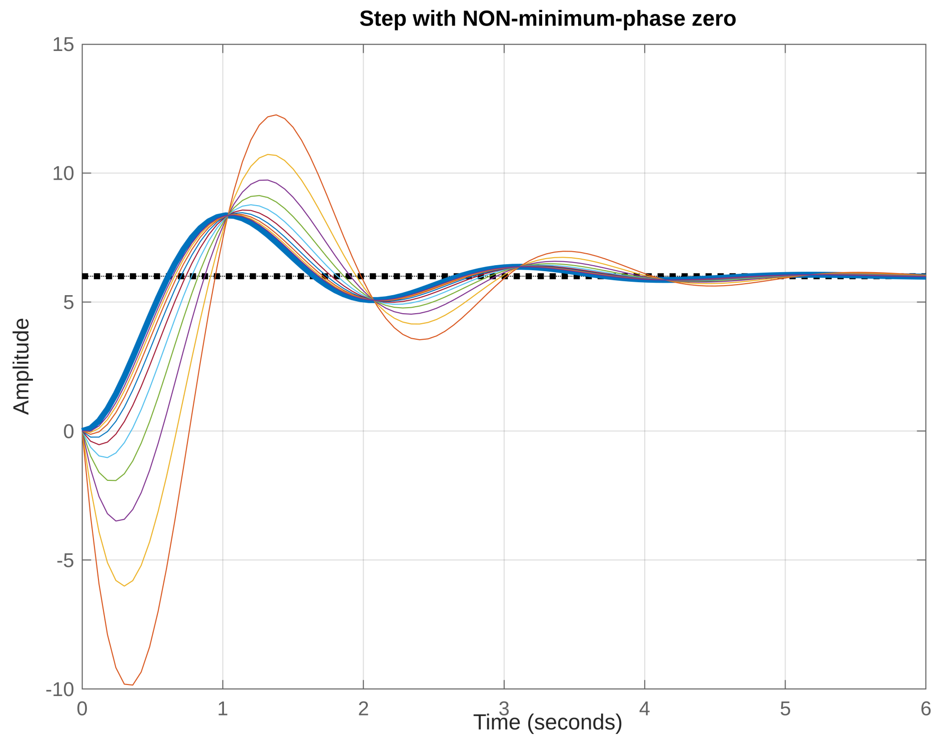
Simulación caso 1: $z > 0$**, fase mínima, ceros en semiplano izquierdo** $-z$

```
step(Gnozeros,6)
set(findall(gcf,'type','line'),'linewidth',3);
hold on
step(G{:},6), grid on, hold off, title("Step with minimum-phase zero")
```



Simulación caso 2: $z < 0$, fase no mínima, ceros en semiplano derecho

```
step(Gnozeros,6)
set(findall(gcf,'type','line'),'linewidth',3);
hold on
step(G_fasenm{:},6), grid on, hold off, title("Step with NON-minimum-phase
zero")
```


Step with NON-minimum-phase zero
15
10
5
0
-5
-10
Amplitude
0
1
2
3
4
5
6
Time (seconds)