Ejemplos ec. medias, varianzas primer orden

Este código ejecutó correctamente en Matlab **R2021b**

**Presentaciones en vídeo:*

http://personales.upv.es/asala/YT/V/edoslin1oa.html , http://personales.upv.es/asala/YT/V/edoslin1ob.html .

Objetivo: Entre los múltiples procesos estocásticos en tiempo contínuo, el más sencillo sería un proceso de primer orden.

Este material discute las propiedades estadísticas de dicho proceso estocástico.

También, su uso para predecir los valores del mismo si se dispone de UNA medida en cierto instante.

Tabla de Contenidos

Modelo del proceso....................1
Ecuación de medias....................2
Ecuación de varianzas....................2
    Discretización....................3
    Régimen estacionario....................4
Autocovarianza y predicción en diferentes instantes de tiempo....................5

Modelo del proceso

Ec. de estado $\dot{x} = Ax + B_w w$, entendida como un proceso (Itô):

$$dx = Ax \cdot dt + B_w dW, \qquad E[dWdW^T] = I \cdot dt$$

```
ejemplo=3;
switch  ejemplo
    case 1
        A=-1; Bw=1; %Estable
    case 2
        A=1; Bw=1; %Inestable
    case 3
        A=0; Bw=1; %Wiener puro
end
sys=ss(A,Bw,1,0);
```

Ecuación de medias

La solución de la ecuación de medias es:

$$\overline{x}(t) = e^{At} \cdot \overline{x}(0)$$

de modo que si empezamos tirando cond.inicial con dado de media cero 0, entonces $\overline{x}(t) = 0$ para todo t. Eso supondremos, por lo que no la usamos más.

De todos modos, la exponencial de A aparecerá, en las varianzas y covarianzas.

```
syms t real
Ad=expm(A*t)
```

Ad = 1

Ecuación de varianzas

En cuanto a la ecuación de varianzas:

$$\frac{dP}{dt} = AP + PA^T + W$$

$$P(t) = e^{At}P(0)e^{A^T t} + \int_0^t e^{A\tau}We^{A^T\tau}\,d\tau$$

si suponemos que empezamos en $P(0) = 0$, sólo necesitamos el segundo término

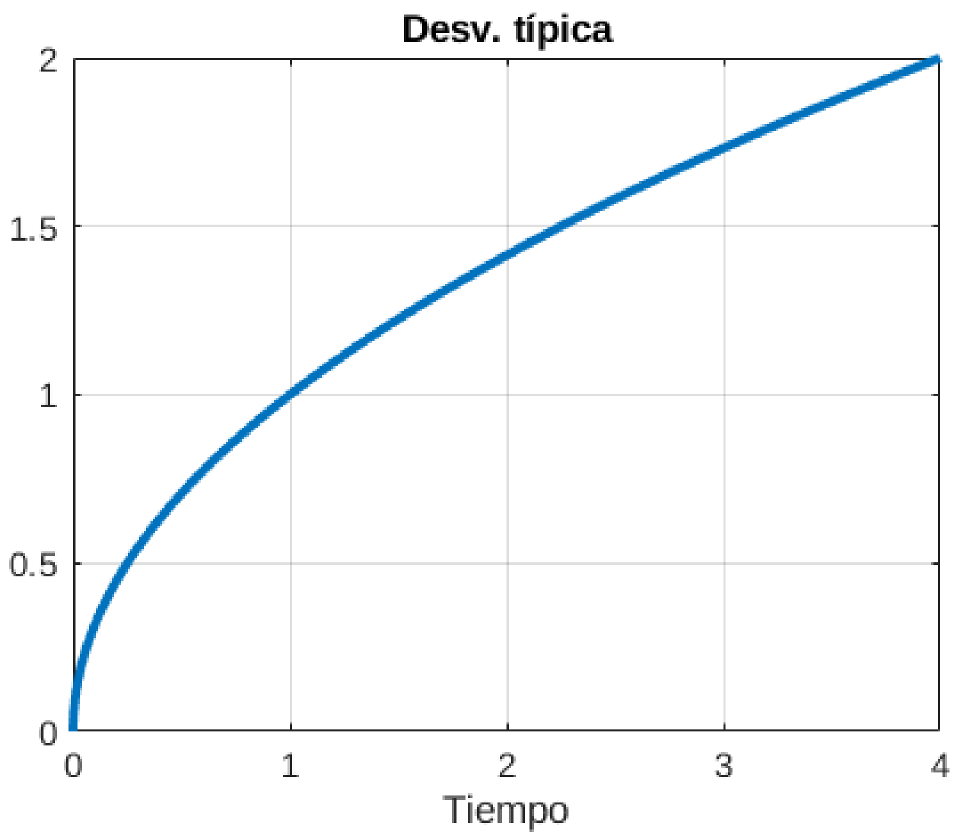
$$P(t) = \int_0^t e^{A\tau}We^{A^T\tau}\,d\tau$$

```
W=Bw*Bw';
syms tau real
P(t)=int(expm(A*tau)*W*expm(A'*tau),0,t) %matriz VC
```

P(t) = t

La desv. típica empezando en "cero" será:

```
if ejemplo==2
    rrgg=[0 1.5];
else
    rrgg=[0 4];
end
fplot(sqrt(P),rrgg,LineWidth=3),
grid on, title("Desv. típica"),xlabel("Tiempo")
hold off
```



Discretización

Si queremos discretizar a, por ejemplo T_s=0.2 segundos, entonces tendremos ecuación de medias dada por

$$\overline{x}_{k+1} = A_d * \overline{x}_k$$

ecuación de varianzas

$$P_{k+1} = A_d * P_k * A_d^T + W_d$$

con

```
Ts=0.2;
A_discreta=expm(A*Ts)
```

```
A_discreta = 1
```

```
W_discreto=eval(P(Ts))
```

```
W_discreto = 0.2000
```

Si quisiéramos simular realizaciones individuales (esto realmente no es muy común ni necesario en "estimación" o "control" más que para comprobar resultados, la realización individual ya la hará la "naturaleza" al hacer experimentos prácticos), entonces deberíamos tirar un dado multiplicando a `randn()` por:

```
Bw_discreto=sqrtm(W_discreto)
```

```
Bw_discreto = 0.4472
```

Obviamente, si $T_s \to 0$ entonces eso se parece a

```
sqrt(Ts)
```

```
ans = 0.4472
```

*Si hubiera entrada manipulada con retenedor ZOH, entonces $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + B_u u$ se discretizaría con la misma A_discreta, pero con B_discreto dado por:

```
Bu=1;
XI=expm([A Bu;0 0]*Ts);
Bu_discreto=XI(1,2)
```

```
Bu_discreto = 0.2000
```

Régimen estacionario

La varianza en régimen estacionario será el límite cuando integramos hasta infinito

```
P_estac=eval(limit(P,inf))
```

```
P_estac = Inf
```

Podemos calcular el valor final de $\frac{dP}{dt} = AP + PA^T + W$ resolviendo $0 = AP + PA^T + W$, sin integrar, en el caso ESTABLE (en inestable da "negativo", es un equilibrio de la ec. de varianzas correcto, pero sin significado físico; es el análogo en estadística al *"G(0) es el valor final ante escalón unitario de un sistema **estable**, pero no si es inestable"*):

```
if ejemplo~=3
    lyap(A,Bw*Bw') %sólo hay solución si A no es cero.
end
```

Y esta varianza es lo que se denomina gramiano de controlabilidad (en caso estable):

```
if(isstable(sys))
    gram(sys,'c') %sólo funciona si sys.B es la Bw asociada al ruido
end
```

La desv. típica de las realizaciones del proceso una vez ha transcurrido mucho tiempo es la raíz de la varianza estacionaria:

```
dt_stac=sqrt(P_estac)
```

```
dt_stac = Inf
```

Eso es lo que la "norma 2" de un sistema produce:

```
norm(sys,2) %sólo funciona si C=I. En multivariable, norma2 es sqrt(trace(P_estac)), si
```

```
Warning: The H2 norm is infinite because the system is unstable.
ans = Inf
```

En un sistema físico ESTABLE que lleve mucho tiempo conectado, el régimen estacionario será lo único que veamos.

Autocovarianza y predicción en diferentes instantes de tiempo

Para predecir (interpolar, extrapolar) en diferentes instantes de tiempo, necesitamos la autocovarianza.

La autocovarianza vendrá dada por

$E[x(t+\tau)x(t)] = e^{A\tau}P(t),\ \ \tau >= 0$ requerido por causalidad.

```
syms tau real
S(t,tau)=simplify(expm(A*tau)*P(t)) %respetemos causalidad: tau>0
```

S(t, tau) = t

La autocovarianza cuando el proceso está en régimen estacionario, será:

```
cov_stac(tau)=S(inf,tau)   %respetemos causalidad: tau>0
```

cov_stac(tau) = ∞

Sólo depende de la diferencia de tiempos, como estipula la teoría.

- Como ejemplo de su uso, la mejor predicción de $x_1(t_2)$ dado $x_1(t_{medida})$, $t_2 > t_{medida}$ será la **extrapolación** que en media multiplica la medida de $x_1(t)$ por:

```
syms t2 tmed real
PredMedFut(tmed,t2)=S(tmed,t2-tmed)/P(tmed)
```

PredMedFut(tmed, t2) = 1

Cuya varianza a posteriori será:

```
Pred_VCfutur(tmed,t2)=simplify( P(t2)-S(tmed,t2-tmed)/P(tmed)*S(tmed,t2-tmed) ,50)
```

Pred_VCfutur(tmed, t2) = $t_2 - \mathrm{tmed}$

y desv. típica (int. confianza):

```
DT_extrap(tmed,t2)=sqrt(Pred_VCfutur(tmed,t2));
if ejemplo==2
    tmedida=1.5; %si no, es muy inestable
    taumax=2; %para la gráfica
else
    tmedida=7;
    taumax=4;
end
medida=1.0; %probar 1 y 2.2 en el inestable


fplot(@(t2x) PredMedFut(tmedida,t2x)*medida,tmedida+[0 taumax],LineWidth=4), grid on
hold on
fplot(@(t2) PredMedFut(tmedida,t2)*medida+2*DT_extrap(tmedida,t2),tmedida+[0 taumax],'-
fplot(@(t2) PredMedFut(tmedida,t2)*medida-2*DT_extrap(tmedida,t2),tmedida+[0 taumax],'-
plot(tmedida,medida,'*k',LineWidth=2,MarkerSize=10)
hold off
legend("Media","int. Conf. 2\sigma","", "Medida",Location="best")
title("Predicción a futuro")
yline(0)
drawnow
```

Si en el instante t_{medida} ya estuviéramos en régimen estacionario, entonces:

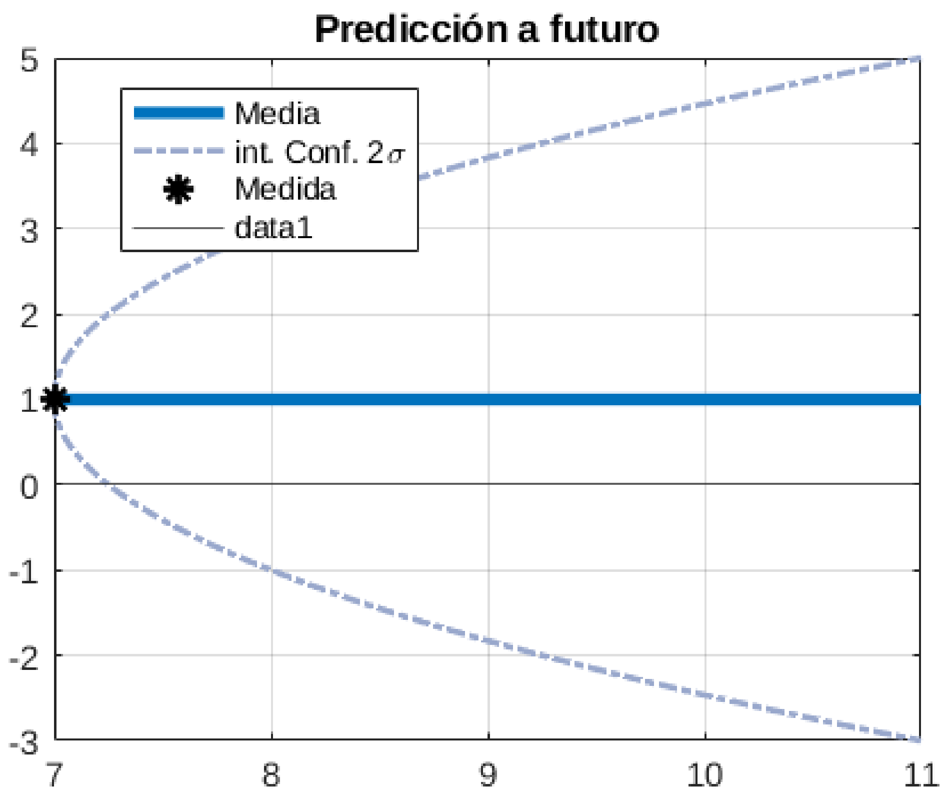
```
S(inf,tau)/P(inf) %predicción futura en media, esto se multiplicaría por la medida
```

ans = NaN

```
P(inf)-S(inf,tau)^2/P(inf) %varianza a posteriori
```

ans = NaN

```
hold on
```



● También podemos "**interpolar**" en tiempos anteriores.

```
syms t1 real
```

En media, la predicción estimada será la medida multiplicada por esta ganancia:

```
PredMM(t1,tmed)=simplify(S(t1,tmed-t1)/P(tmed)) %Importante: causalidad, S(antes,diftie
```

```
PredMM(t1, tmed) =
```

$$\frac{t_1}{\mathrm{tmed}}$$

El intervalo de confianza lo dará la raíz de la varianza a posteriori. La varianza es;

```
Vzpostx1(t1,tmed)=simplify(P(t1)-S(t1,tmed-t1)/P(tmed)*S(t1,tmed-t1),50)
```

```
Vzpostx1(t1, tmed) =
```

$$t_1 - \frac{{t_1}^2}{\mathrm{tmed}}$$

```
Dtpostx1(t1,tmed)=simplify(sqrt(Vzpostx1));
```

Dibujemos la interpolación estadística:

```
fplot(@(t1) PredMM(t1,tmedida)*medida,[0 tmedida],LineWidth=4), grid on, hold on
fplot(@(t1) PredMM(t1,tmedida)*medida+2*Dtpostx1(t1,tmedida),[0 tmedida],'-.',LineWidth
fplot(@(t1) PredMM(t1,tmedida)*medida-2*Dtpostx1(t1,tmedida),[0 tmedida],'-.',LineWidth
plot(tmedida,medida,'*k',LineWidth=2,MarkerSize=10)
hold off
legend("Media","int. Conf. 2\sigma","", "Medida",Location="best")
title("Predicción a pasado y futuro")
```