

# Dinámica Longitudinal aeronave: modo “fugoide” simplificado orden 2 Punto de equilibrio, linealización, estabilidad

Antonio Sala

Modelado, Identificación y Control de Sistemas Complejos

Universitat Politècnica de València

Enlace a materiales, comentarios, etc. en descripción y web personal

Video-presentación disponible en:

<http://personales.upv.es/asala/YT/V/fugeqlin.html>



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Presentación

## Motivación:

Bajo ciertas aproximaciones, la dinámica de una aeronave puede aproximarse a un modo “masa puntual” denominado “fugoide”.

## Objetivos:

Analizar los puntos de equilibrio y la estabilidad de dicha dinámica).

## Contenidos:

Revisión conceptos. Equilibrio. Linealización. Estabilidad. Conclusiones.



UNIVERSITAT  
POLITÀCNICA  
DE VALÈNCIA

# Suposiciones modo longitudinal "fugoide"

- Movimiento en plano  $(x, y)$ , desplazamiento longitudinal vs. elevación.
- Inercia despreciable. La aerodinámica le alinea "infinitamente rápido" en un ángulo de incidencia prefijado con la velocidad del aire (el avión se comporta como una VELETA). **Body frame  $\equiv$  Path frame.**
- Longitud avión despreciable respecto a radio curvatura trayectoria.

O sea, que se resume en una dinámica 2GL donde el ángulo depende de la trayectoria  $(x, y)$ , orden 4 en posiciones, orden 2 en velocidades.

**\*Fórmulas de Zhukovski (1891)-Lanchester (1908).**

**\*Coordenadas Intrínsecas**, sistema no inercial.



UNIVERSITAT  
POLITÀCNICA  
DE VALÈNCIA

# Ecuaciones del modo fugoide (repr. interna normalizada)

Sustituyendo  $L$  y  $D$  por expresiones que, por simplicidad, sólo hacemos dependientes de  $v^2$  (también dependen de la orientación de la aeronave con respecto al vector velocidad de aire, ...), tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -g \sin \theta - \frac{d}{m} \cdot v^2 + \frac{1}{m} u \\ \frac{d\theta}{dt} &= -g \frac{\cos \theta}{v} + \frac{l}{m} \cdot v\end{aligned}$$

Con esta ecuación de estado, ya podemos hacer simulación, p.ej., con [ode45](#). Si  $v$  se acerca a 0, tendríamos una singularidad.

\*No hemos considerado  $\frac{\partial u}{\partial v}$ , en particular en aviones de hélice ( $\approx$  potencia constante,  $u = \text{Power}/v$ )... y muchas otras cosas tampoco. Puede cambiar el análisis.

# Punto de operación (velocidad y ángulo de planeo)

La orientación y velocidad se mantendrán constantes si sus derivadas son cero:

$$0 = -g \sin \theta_{eq} - \frac{d}{m} \cdot v_{eq}^2 + \frac{1}{m} u_{eq}$$

$$0 = -g \frac{\cos \theta_{eq}}{v_{eq}} + \frac{l}{m} \cdot v_{eq}$$

Quitando denominadores y operando:

$$mg \sin \theta_{eq} = -d \cdot v_{eq}^2 + u_{eq}$$

$$mg \cos \theta_{eq} = +l \cdot v_{eq}^2$$

Son 2 ecuaciones, 3 variables: fijada una de ellas podemos calcular las otras 2.

# Identidades de interés sobre pto. funcionamiento

\*planeador  $u = 0$ , descenso:

$$\theta_{eq} = \arctan \frac{-d}{l} \qquad v_{eq}^2 = \frac{mg}{\sqrt{d^2 + l^2}} \qquad Lift^2 + Drag^2 = Weight^2$$

Dado el ángulo de planeo deseado:

$$v_{eq} = \sqrt{\frac{mg}{l} \cos \theta_{eq}}$$

$$u_{eq} = mg \left( \sin \theta_{eq} + \frac{d}{l} \cos \theta_{eq} \right)$$

P.ej. vuelo nivelado:  $\theta_{eq} = 0$ ,  $v_{eq} = \sqrt{mg/l}$ ,  $u_{eq} = mg \cdot d/l$ .

**Flaps:** incrementar " $l$ " consigue equilibrio a menor velocidad. Si  $d/l$  se mantiene, no cambia  $u_{eq}$ .

Planteando el equilibrio de fuerzas,  $L^2 + (u - D)^2 = m^2 g^2$ , o sea:

$$l^2 v_{eq}^4 + (u_{eq} - d v_{eq}^2)^2 = m^2 g^2$$

con lo que

$$(d^2 + l^2) v_{eq}^4 - 2 d u_{eq} v_{eq}^2 + (u_{eq}^2 - m^2 g^2) = 0$$

es una ecuación bicuadrada de la que obtener  $v_{eq}^2$  dado  $u_{eq}$ .

$$v_{eq}^2 = \frac{d u_{eq} \pm \sqrt{(d^2 + l^2) m^2 g^2 - l^2 u_{eq}^2}}{d^2 + l^2}$$

\*Si  $mg < u \leq mg \sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2}$  hay 2 soluciones positivas, y 2 ángulos de equilibrio, claro.

\*Si  $u > mg \frac{\sqrt{l^2 + d^2}}{l}$  no hay solución real, no existen ángulo y velocidad de equilibrio.

# Estabilidad: Modelo linealizado

\*Coords. incrementales:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{2d \cdot v_{eq}}{m} \cdot v - g \cos \theta_{eq} \cdot \theta + \frac{1}{m} u \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left( \frac{l}{m} + \frac{g \cos \theta_{eq}}{v_{eq}^2} \right) v + \frac{g \sin \theta_{eq}}{v_{eq}} \cdot \theta \quad (2)$$

Usamos el hecho que  $0 = -mg \cos \theta_{eq} + l v_{eq}^2$ , esto es,  $\frac{g \cos \theta_{eq}}{v_{eq}^2} = \frac{l}{m}$ , para escribir la representación interna

normalizada matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2d \cdot v_{eq}}{m} & -g \cos \theta_{eq} \\ +\frac{2l}{m} & +\frac{g \sin \theta_{eq}}{v_{eq}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Puede ser estable o inestable, dependiendo de  $l$ ,  $d$  y  $u_{eq}$ .

\*Si  $l > 0$ ,  $d > 0$ ,  $\theta_{eq} \leq 0$  es estable.



UNIVERSITAT  
POLITÀNICA  
DE VALÈNCIA



# Estabilidad del vuelo horizontal

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2d \cdot v_{eq}}{m} & -g \\ +\frac{2l}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Ec. característica:

$$s^2 + \frac{2dv_{eq}}{m}s + \frac{2lg}{m} = 0$$

sustituyendo  $l/m = g/v_{eq}^2$ :

$$s^2 + \frac{2dv_{eq}}{m}s + \frac{2g^2}{v_{eq}^2} = 0$$

Los sistemas de orden 2 suelen escribirse en forma  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ . Resulta:

$$\omega_n = \frac{\sqrt{2g}}{v_{eq}}, \text{ y } 2\zeta\sqrt{2g}v_{eq}^{-1} = 2dv_{eq}m^{-1}, \text{ sale } \zeta = \frac{dv_{eq}^2}{mg\sqrt{2}} = \frac{dv_{eq}^2}{lv_{eq}^2\sqrt{2}} = \frac{d}{l\sqrt{2}}$$

La frec. natural depende (inversa) de velocidad, amortiguamiento depende drag/lift, que suele ser pequeño. Oscilaciones muy poco amortiguadas.

## ¿Mejor Estable o inestable?

- Cuanto más "drag" más estable... Pero más "hacia abajo" es el ángulo de planeo con  $u = 0$ , y más empuje se necesita para mantener un vuelo nivelado, menor eficiencia.
- Menos "drag" produce planeo más horizontal, y poco empuje necesario para ángulos pequeños. Pero el modo fugoide está poco amortiguado, requiere atención del piloto... depende de su período, depende de si "ve" el horizonte o vuela "a ciegas" en nubes... Bueno, autopiloto o "stability augmentation" o "anti-phugoid" pueden encargarse... Pero puede interferir maniobras "agresivas" en emergencias...





# Punto de equilibrio, linealización y estabilidad local del modo fugoide de aeronave

© 2023, Antonio Sala Piqueras, Universitat Politècnica de València. Todos los derechos reservados.

\*Este código ejecutó sin errores en Matlab R2022b

**Objetivos:** analizar numéricamente el punto de equilibrio y la estabilidad del mismo de un modelo simplificado del vuelo fugoide de una aeronave.

## Tabla de Contenidos

Modelado, linealización y valores numéricos de parámetros.....	1
Punto de equilibrio.....	1
Casos particulares.....	2
Linealización (para análisis estabilidad).....	2
Gráficas de comportamiento en función de ángulo de planeo.....	3

## Modelado, linealización y valores numéricos de parámetros

```
d=1/5; l=1; m=1; g=9.8;%valores normalizados, inventados.
```

### Ecuaciones del movimiento:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta - dv^2 + u \text{ [dinámica tangencial]}$$

$$mv \frac{d\theta}{dt} = -mg \cos \theta + l \cdot v^2 \text{ [dinámica normal (con signo: izquierda, antihorario)]}$$

Las introducimos en Symbolic Toolbox:

```
syms v theta U
EcEstado=[-g*sin(theta)-d*v^2/m+U/m;-g*cos(theta)/v+l*v/m];vpa(EcEstado,4)

ans =

$$\begin{pmatrix} -0.2 v^2 + U - 9.8 \sin(\theta) \\ v - \frac{9.8 \cos(\theta)}{v} \end{pmatrix}$$

```

## Punto de equilibrio

Si queremos calcular el empuje y velocidad para cierto ángulo de planeo deseado  $\theta_e$ , tendríamos:

$$0 = -mg \sin \theta_e - dv_e^2 + u$$

$$0 = -mg \cos \theta_e + l \cdot v_e^2$$

de lo cual

$$v_e = \sqrt{\frac{mg}{l} \cos \theta_e}, \quad u_e = mg \cdot \left( \sin \theta_e + \frac{d}{l} \cos \theta_e \right)$$

### Casos particulares

```
umax_eq=sqrt(1^2+d^2)/1 %esto *mg es umax para que haya equilibrio
```

```
umax_eq = 1.0198
```

Las condiciones para vuelo nivelado  $\theta_e = 0$ , resultan:

$$v_e = \sqrt{\frac{mg}{l}}, \quad u_e = mg \cdot \frac{d}{l}$$

```
Empuje_level=d/l %empuje para vuelo nivelado, dividido por peso (empuje específico)
```

```
Empuje_level = 0.2000
```

Con empuje cero, planeador, entonces tendríamos:

$$mg \sin \theta_e = -dv_e^2$$

$$mg \cos \theta_e = l \cdot v_e^2$$

$$\text{o sea, } \tan \theta_e = -\frac{d}{l}.$$

```
Theta_planeador=atan(-d/l)*180/pi
```

```
Theta_planeador = -11.3099
```

Otras expresiones salen si la variable conocida fuera  $u_e$  o  $v_e$ , obviamente.

### Linealización (para análisis estabilidad)

```
jacA=jacobian(EcEstado,[v,theta]);vpa(jacA,4) %falta sustituir el pto. de equilibrio
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} -0.4 v & -9.8 \cos(\theta) \\ \frac{9.8 \cos(\theta)}{v^2} + 1.0 & \frac{9.8 \sin(\theta)}{v} \end{pmatrix}$$

```
jacB=jacobian(EcEstado,U);vpa(jacB,4)
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 1.0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la ecuación característica  $\det(sI - A) = 0$  será:

```
syms s
collect(simplify(det(s*eye(2)-jacA)), s) %Segundo orden...
```

ans =

$$s^2 + \left( -\frac{245 v \sin(\theta) - 10 v^3}{25 v^2} \right) s + \frac{245 v^2 \cos(\theta) - 98 \sin(\theta) v^2 + 2401 \cos(\theta)^2}{v^2 25}$$

Estable o no, depende... Todos los coeficientes deberían ser positivos para tener estabilidad.

Si pto. de funcionamiento es "Ángulo de ascenso alto" se puede hacer inestable. Lo comprobaremos numéricamente.

## Gráficas de comportamiento en función de ángulo de planeo

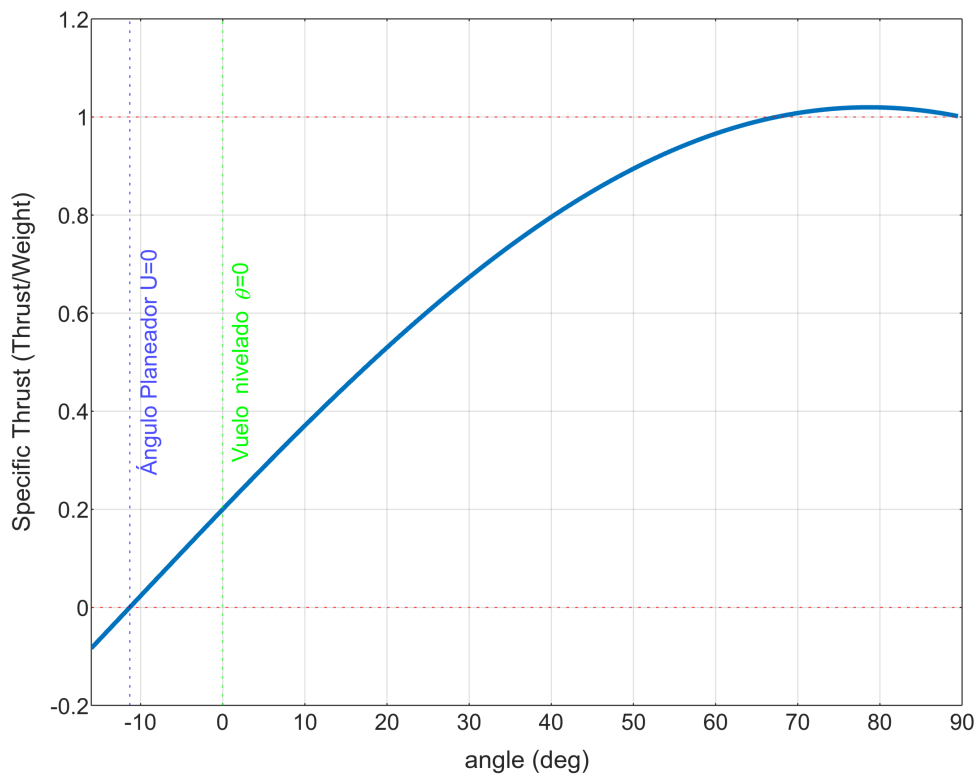
```
Thmin=round(Theta_planeador-5);  
Th_range=(Thmin:0.5:89.5)*pi/180; %Rango de ángulos a graficar  
NE=length(Th_range);
```

Almacenamos los resultados para graficar

```
grv0=zeros(NE,1); grU=zeros(NE,1);  
grwp=zeros(NE,1); grreal=zeros(NE,2);  
  
%bucle de cálculos  
for k=1:NE  
    % Punto de Funcionamiento  
    theta=Th_range(k);  
    v0=sqrt(m*g*cos(theta)/l);  
    U0=m*g*(sin(theta)+d*cos(theta)/l);  
    grv0(k)=v0;  
    grU(k)=U0;  
    % Análisis de estabilidad del modelo linealizado  
    A=eval(subs(jacA,{v},{v0})); %modelo linealizado, repr. interna  
    ee=eig(A); %valores propios  
    grreal(k,:)=real(ee); %guardamos parte real  
    wp=imag(ee(1)); %frecuencia propia de oscilaciones (parte imaginaria)  
    grwp(k)=wp;  
  
end
```

Representación gráfica:

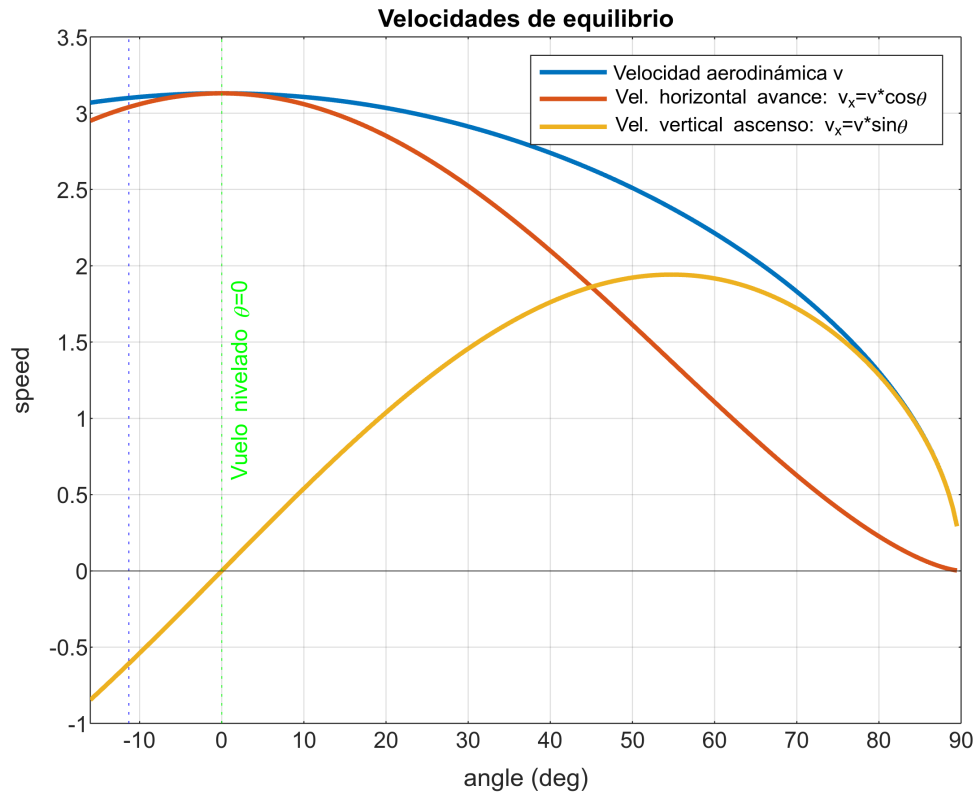
```
plot(Th_range*180/pi,grU/m/g,LineWidth=2), grid on,  
xlabel("angle (deg)"), ylabel("Specific Thrust (Thrust/Weight)"),  
xlim([Thmin 90]),  
yline(1,':r'), yline(0,':r'),  
xline(Theta_planeador,':b',Label="Ángulo Planeador U=0", LabelVerticalAlignment="middle"),  
xline(0,':g',Label="Vuelo nivelado \theta=0", LabelVerticalAlignment="middle")
```



```

plot(Th_range*180/pi,grv0,LineWidth=2), grid on, xlabel("angle (deg)"),
hold on, plot(Th_range*180/pi,grv0.*cos(Th_range'),LineWidth=2)
plot(Th_range*180/pi,grv0.*sin(Th_range'),LineWidth=2), hold off,
ylabel("speed"),xlim([Thmin 90]), xline(Theta_planeador,':b'), yline(0)
xline(0,':g',Label="Vuelo nivelado \theta=0", LabelVerticalAlignment="middle")
legend("Velocidad aerodinámica v","Vel. horizontal avance: v_x=v*cos\theta","Vel. verti
title("Velocidades de equilibrio")

```



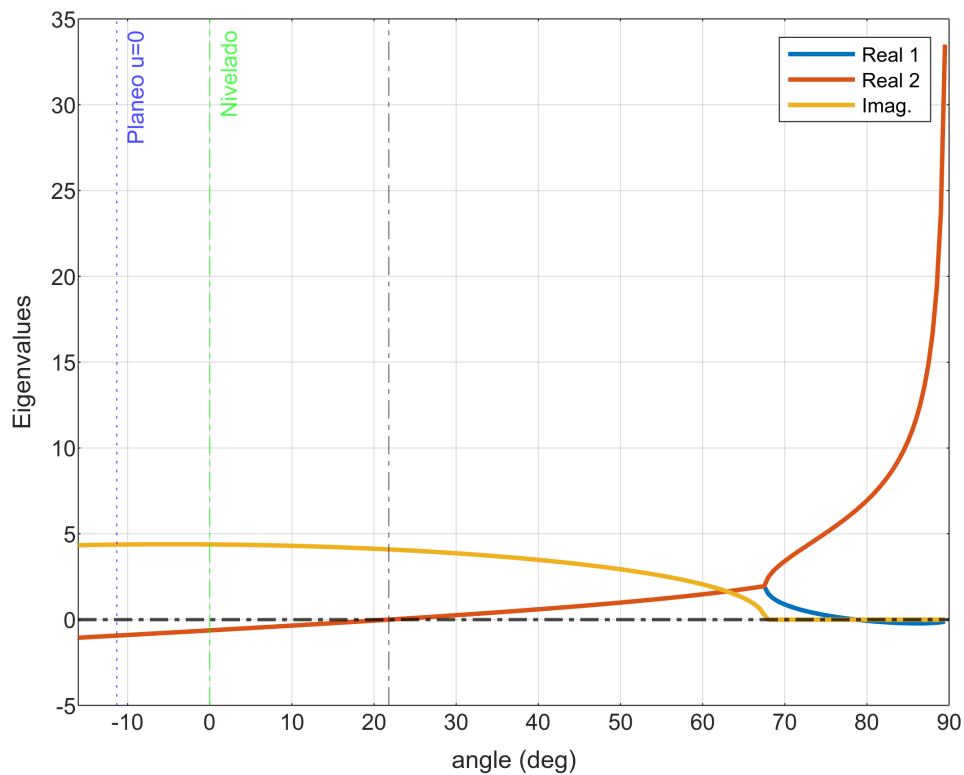
```
%Gráficas para análisis de estabilidad
```

```
plot(Th_range*180/pi,[grreal grwp],LineWidth=2), grid on, xlabel("angle (deg)"), ylabel("speed")
xlim([Thmin 90]), xline(Theta_planeador,':b',Label="Planeo u=0"), yline(0,"-.k",LineWid=2)
angulo_inestable=atan(2*d/l)*180/pi
```

```
angulo_inestable = 21.8014
```

```
xline(0,'-.g',Label="Nivelado")
xline(angulo_inestable,'-.')
legend("Real 1","Real 2","Imag.")
```





- Inestable a ángulo alto. Cuanto más "drag" más "estable"... Perder energía mejora estabilidad...
- Las superficies de control, los flaps, etc. cambian lift, drag, ángulo de incidencia... Estos modelos aproximan el planeo o el fugoide con punto de diseño en vuelo horizontal, o algo así. Maniobras agresivas requieren modelo 3GL del avión, incluyendo momento de inercia rotacional, etc. Tampoco hemos tenido en cuenta que una hélice puede variar su empuje con el airspeed, etc. O sea, todo es aproximado, únicamente orientativo.