

Modelado y simulación de calentador tubular mediante discretización espacial (elementos finitos)

© 2022, Antonio Sala Piqueras. Universitat Politècnica de València. Todos los derechos reservados.

Este código funcionó correctamente con Matlab R2022a

Presentaciones en vídeo:

<http://personales.upv.es/asala/YT/V/tubulFE1.html> , <http://personales.upv.es/asala/YT/V/tubulFEsim1.html> , <http://personales.upv.es/asala/YT/V/tubulFEsim2.html> .

Objetivo: Modelar con "elementos discretos" la dinámica de un calentador tubular con una resistencia a lo largo del mismo calentando un fluido para aproximar la Ecuación en Derivadas Parciales con ecuaciones diferenciales ordinarias (orden finito, representación interna). Simular las EDO resultantes y graficar la respuesta.

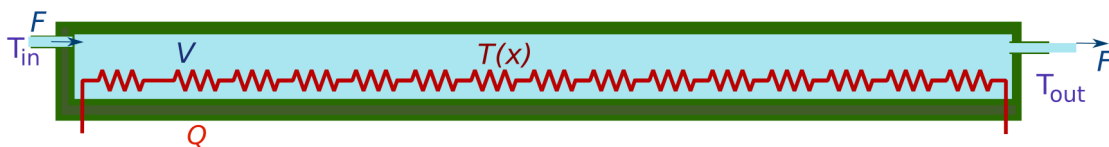


Tabla de Contenidos

Datos numéricos totales del intercambiador a simular.....	1
1.- Revisión Modelado.....	2
1.1- Ec. derivadas parciales.....	2
1.1.1- Solución EDP caudal F constante.....	2
1.1.2- Modelo estático (rég. permanente).....	2
1.1.3- Temperatura media (estacionaria) en función de temperaturas de entrada y salida.....	3
1.2- Modelo de primeros principios de 1 elemento (parámetros concentrados).....	4
2.- Modelo muchos elementos.....	5
Construcción del modelo numérico de elementos no infinitesimales.....	6
Simulación (no lineal).....	9
Modelo sin dinámica.....	9
Modelo dinámico.....	10
Trozo simulación 1: sin calor, cambio escalón en T entrada.....	11
Trozo simulación 2: sin calor, cambio escalón en caudal.....	12
Trozo simulación 3: cambio escalón en potencia calorífica Q entrada.....	13
Simulaciones observando variables (temperaturas) en elementos intermedios.....	14
Conclusiones.....	17

Datos numéricos totales del intercambiador a simular

```
Ltot=1; %total length
S=0.01; %cross-section
barkappa=350; %heat conduction per unit length
```

```

Ce=4.18e3; %J/Kg/K Calor específico del fluido (agua)
rho=1000; %Kg/m^3 densidad (agua)

%lo guardamos porque luego lo borramos para manipulaciones simbólicas.
problem.Ce=Ce;problem.rho=rho;

F_pf=0.0002; %pto. func. para cálculos nominales.

Vtot=Ltot*S; %m^3 volumen total

```

1.- Revisión Modelado

Suponemos temperatura ambiente cero, o bien variables incrementales sobre ella, para que no aparezca en las ecuaciones.

1.1- Ec. derivadas parciales

El intercambiador tubular está regido por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{S} F \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\bar{\kappa}}{S\rho C_e} T + \frac{\bar{Q}}{S\rho C_e}$$

$\bar{Q}$ es potencia calorífica por unidad de longitud. $T(x, t)$ es la solución de temperatura buscada... posiblemente sólo busquemos $T_{out} := T(L, t)$.

1.1.1- Solución EDP caudal F constante

Tiene solución con Laplace para caudal F constante, pero el inconveniente es 1) el flujo a través del tubo F no puede variar, y 2) Tiene retardo (orden "infinito").

En otros materiales, si denominamos $\phi = L/v$, tenemos la matriz de transferencia con

$$\mathbb{T}_{out}(s) = \begin{pmatrix} (1 - e^{-\phi \cdot s} e^{-a\phi}) \frac{b}{s + a} & e^{-\phi \cdot s} e^{-a\phi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{Q}(s) \\ \mathbb{T}_{in}(s) \end{pmatrix}$$

En parámetros físicos $a = \frac{\bar{\kappa}}{S\rho C_e}$, $b = \frac{1}{S\rho C_e}$, $v = \frac{F}{S}$, $\phi = \frac{L}{v} = \frac{V}{F}$ (retardo temporal), entonces

$$a\phi = \frac{\bar{\kappa}L}{F\rho C_e} = \frac{\bar{\kappa}L}{vS\rho C_e} \text{ (exponencial espacial).}$$

1.1.2- Modelo estático (rég. permanente)

- El caso estacionario con calefactor, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, llamaremos a la solución $T_{eq}(x)$, y resulta

$$\frac{\partial T_{eq}}{\partial x} = -\frac{\bar{\kappa}}{F\rho C_e} T_{eq} + \frac{1}{F\rho C_e} \bar{Q}_{eq}(x), \text{ que, con calentamiento constante en toda la longitud del}$$

intercambiador, resultaría, definiendo $\lambda = \frac{\bar{\kappa}}{F\rho C_e}$, en:

$$T_{eq}(x) = T_{in} \cdot e^{-\lambda \cdot x} + (1 - e^{-\lambda \cdot x}) \bar{\kappa}^{-1} \cdot \bar{Q}_{eq}$$

$$T_{out} = T_{eq}(L) = T_{in} \cdot e^{-\lambda \cdot L} + (1 - e^{-\lambda \cdot L}) \bar{\kappa}^{-1} \cdot \bar{Q}_{eq}$$

coincide, obviamente con lo de arriba con $s = 0$, dado que $\lambda L = a\phi$.

Como el modelo depende del caudal, para simularlo a caudal variable lo haremos como función de caudal y longitud.

```
lambda=@(F) barkappa/rho/Ce./F;
ganTin=@(F,L) exp(-lambda(F)*L); %lo que multiplica a Tin
ganQ=@(F,L) 1e3*(1-ganTin(F,L))/barkappa/L; %lo que multiplica a Q en kW
```

En concreto, en nuestro calentador concreto

```
ganTin_pf=ganTin(F_pf,Ltot)
```

```
ganTin_pf = 0.6579
```

```
ganQ(F_pf,Ltot)
```

```
ans = 0.9773
```

1.1.3- Temperatura media (estacionaria) en función de temperaturas de entrada y salida

Según recordado arriba, se puede demostrar que $T_{eq}(x) = Ae^{-\lambda x} + B$, con $A = \frac{T_{in} - T_{out}}{1 - e^{-\lambda L}}$,

$$B = \frac{T_{out} - e^{-\lambda L} T_{in}}{1 - e^{-\lambda L}}, \text{ y } \lambda = \frac{\bar{\kappa}}{F\rho C_e}.$$

La temperatura media $\bar{T} := \frac{1}{L} \int_0^L T_{eq}(x) dx$ que debería usarse en balances de energía para tener el estacionario bien modelado es

$$\bar{T} = (1 - \beta)T_{in} + \beta T_{out}$$

con:

$$\beta(\lambda L) = \frac{\lambda L - (1 - e^{-\lambda L})}{\lambda L(1 - e^{-\lambda L})}$$

```
betalele=@(F,L) (lambda(F)*L-1+ganTin(F,L))/(lambda(F)*L*(1-ganTin(F,L)));
beta_1elemento_perf_exponencial=betalele(F_pf,Ltot)
```

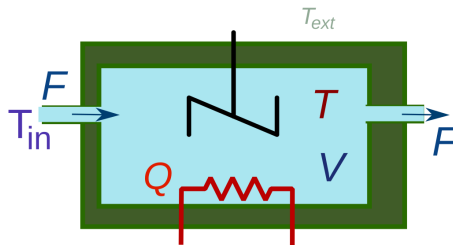
```
beta_1elemento_perf_exponencial = 0.5348
```

Realmente, no sale con los datos numéricos propuestos, muy diferente de 0.5 (perfil lineal).

Utilizar esta expresión de $\bar{T}$ introduce términos de fase no mínima (respuesta inversa) poco "naturales" ante escalón, pero que aproximan mejor el retardo a baja frecuencia.

1.2- Modelo de primeros principios de 1 elemento (parámetros concentrados)

Modelo de un tanque con una resistencia (proporcionando potencia Q)



Entradas:

```
syms F real %caudal de entrada
syms Tin real %temp. entrada
syms Q real %calor de la resistencia
```

Parámetros constantes:

```
syms V real %volumen tanque
syms rho real %densidad
syms kappa real %pérdidas
syms Ce real %calor específico (supuesto no cambia con T)
```

Estado y su derivada:

```
syms T dTdt real %temperatura del líquido (media) y su derivada (vble estado)
```

PERFIL temperatura, parámetro ajustable (o calculable con la sol. estacionaria EDP):

$$\bar{T} = \beta T_{out} + (1 - \beta) T_{in}$$

```
syms beta real %0.5 lineal, 1 Tout=T...
```

Balance de energía: (ec. estado sobre la temperatura media $\bar{T}$, aunque gastaremos T en vez de $\bar{T}$ en el código simbólico)

$$\text{Modelo} = V \cdot \rho \cdot C_e \cdot dT/dt == 1/\beta \cdot F \cdot \rho \cdot C_e \cdot (T_{in} - T) - \kappa \cdot T + Q;$$

Repr. interna:

$$dT/dt_{\text{sym}} = \text{simplify}(\text{solve}(\text{Modelo}, dT/dt), 10)$$

$$dT/dt_{\text{sym}} =$$

$$\frac{Q - T \kappa}{C_e V \rho} - \frac{F (T - T_{in})}{V \beta}$$

Es de la forma $\frac{dT}{dt} = \frac{F}{V\beta}(T - T_{in}) - aT + bQ$, con $a = \frac{\kappa}{C_e V \rho}$, $b = \frac{1}{V \rho C_e}$.

Si la entrada fuera en "calor por unidad de longitud" $\bar{Q} = Q/L$ y la conductividad la dieran también por unidad de longitud $\bar{\kappa} = \kappa/L$,

podríamos expresarlo como:

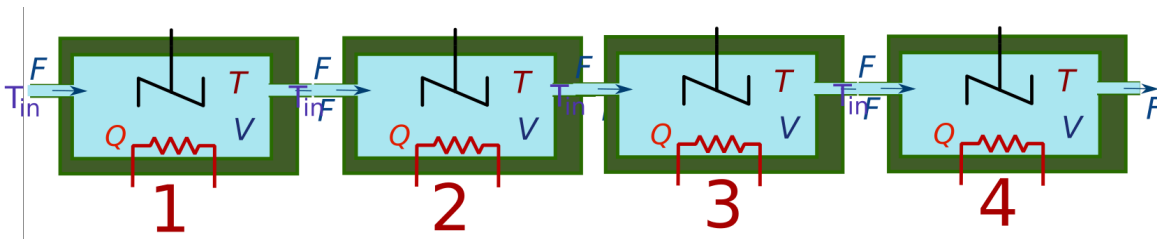
$$\frac{dT}{dt} = \frac{F}{V\beta}(T - T_{in}) - \bar{a} \cdot T + \bar{b} \cdot \bar{Q}, \text{ con } \bar{a} = \frac{\bar{\kappa} L}{C_e V \rho} = \frac{\bar{\kappa}}{C_e S \rho}, \bar{b} = \frac{1}{S \rho C_e}.$$

La ecuación de salida la pondremos más abajo.

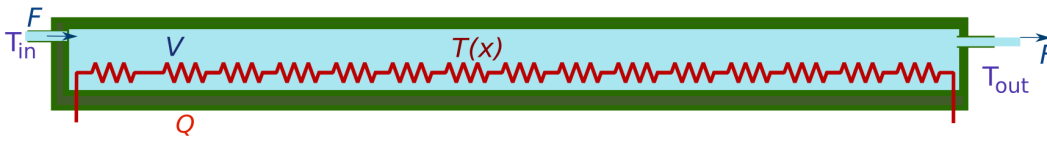
La ecuación de estado es no lineal por el producto FT y FT_{in} cuando F no es constante.

2.- Modelo muchos elementos

Haremos la conexión en serie de muchos de estos elementos (N):



para modelar un intercambiador tubular:



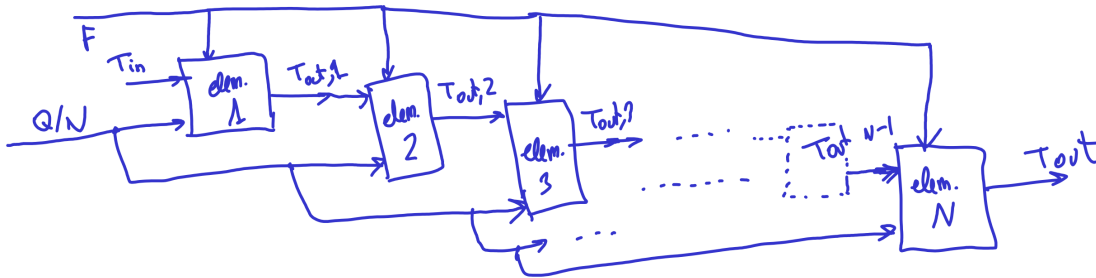
Cada elemento tiene tres entradas (caudal F , temperatura de entrada $T_{in,i}$, Potencia calorífica Q_i), un estado T_i y una temperatura de salida $T_{out,i}$.

El volumen y potencia calorífica (distribuida uniformemente) en cada elemento será el total dividido por el número de elementos.

Tendremos: $F_i = F_{i-1} = F$ (caudal constante), $V_i = V/N$, $Q_i = Q/N$, $\kappa_i = \kappa/N$.

La $T_{in,i}$ entrada a un intercambiador será la salida del anterior $T_{in,i} = T_{out,i-1}$ excepto para $i = 1$, claro, donde $T_{in,1} \equiv T_{in}$ (condición de "contorno" en la "jerga" de EDP).

El objetivo será determinar la dinámica que rige a cada variable de estado T_i ; en concreto, la temperatura de salida será $T_{out,N}$.



Cada elemento tendrá una ecuación de estado (de primer orden) y otra de salida, según discutido antes.

Construcción del modelo numérico de N elementos no infinitesimales

```
%Recuperemos lo machacado en simbólico:
Ce=problem.Ce; rho=problem.rho;
```

Parámetros constantes para cada elemento:

```
N=50; %Número de elementos
V=Vtot/N; %volumen por elemento
Qporelem=Q/N; %potencia calorífica por elemento (suponemos distribuido uniformemente)
kappa=barkappa*Ltot/N; %conductividad por elemento
L=Ltot/N;
beta_exact_perf_exponential=betaalele(F_pf,L) %exact value of beta from exponential form
```

```
beta_exact_perf_exponential = 0.5007
```

```
beta=beta_exact_perf_exponential;  
%beta=0.8; %lo podemos cambiar si queremos menos "oscilaciones raras".
```

Si al final hay "muchos" elementos, dará un poco igual porque $T_{out} \approx T_{in} \approx T_{media}$ en un elemento "infinitesimal" (de ahí salía la EDP). Sólo tiene sentido "preocuparse" por β para simular con "pocos" elementos (idealmente, uno) alrededor de un cierto punto de operación.

Ecuación de estado y salida de cada elemento:

```
dTdt_elem=subs(dTdt_sym,Q,Qporelem);  
EcEstadolelem=eval(dTdt_elem); %cada elemento tiene esta ec. de estado, sustituyendo V,  
vpa(EcEstadolelem,4) %for display purposes
```

```
ans = 2.392e-5 Q - 0.008373 T - 9986.0 F (T - 1.0 Tin)
```

```
EcSalidalelem=T/beta-(1/beta-1)*Tin;  
vpa(EcSalidalelem,4) %for display purposes
```

```
ans = 1.997 T - 0.9972 Tin
```

```
Tvector=sym('T',[N 1],'real');  
%para enseñar lo que sale  
if N>=20 %we show just a few at the beginning and at the end  
    Tvector([1:10 (N-10):N])'  
else %we show everything  
    Tvector'  
end
```

```
ans = (T1 T2 T3 T4 T5 T6 T7 T8 T9 T10 T40 T41 T42 T43 T44 T45 T46 T47 T48 T49 T50)
```

Conformemos el modelo completo:

```
tic  
EcsEstadoCadaElemento=sym(zeros(N,1));  
EcsSalidaCadaElemento=sym(zeros(N,1));  
EcsEstadoCadaElemento(1)=subs(EcEstadolelem,{T},{Tvector(1)});  
EcsSalidaCadaElemento(1)=subs(EcSalidalelem,{T},{Tvector(1)});  
for i=2:N  
    EcsEstadoCadaElemento(i)=subs(EcEstadolelem,{T,Tin},{Tvector(i),EcsSalidaCadaElemento(i-1)});  
    EcsSalidaCadaElemento(i)=subs(EcSalidalelem,{T,Tin},{Tvector(i),EcsSalidaCadaElemento(i-1)});  
end  
toc
```

```
Elapsed time is 1.456250 seconds.
```

```
size(EcsEstadoCadaElemento)
```

```
ans = 1x2
```

Todas estas N ecuaciones conforman el modelo EDO de orden N que aproxima la EDP del calentador tubular. Veamos las cinco primeras ecs de estado:

```
vpa(simplify(EcsEstadoCadaElemento(1:5),20),3)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 2.39\text{e-}5 Q - 0.00837 T_1 - 9990.0 F (T_1 - 1.0 T_{in}) \\ 2.39\text{e-}5 Q - 0.00837 T_2 - 9990.0 F (T_2 - 2.0 T_1 + 0.997 T_{in}) \\ 2.39\text{e-}5 Q - 0.00837 T_3 - 9990.0 F (1.99 T_1 - 2.0 T_2 + T_3 - 0.994 T_{in}) \\ 2.39\text{e-}5 Q - 0.00837 T_4 - 9990.0 F (1.99 T_2 - 1.99 T_1 - 2.0 T_3 + T_4 + 0.992 T_{in}) \\ 2.39\text{e-}5 Q - 0.00837 T_5 - 9990.0 F (1.98 T_1 - 1.99 T_2 + 1.99 T_3 - 2.0 T_4 + T_5 - 0.989 T_{in}) \end{pmatrix}$$

Y veamos las cinco primeras ecs. de salida de cada elemento (innecesarias, claro, si en el sistema final sólo la temperatura a la salida del calentador fuera de interés):

```
vpa(simplify(EcsSalidaCadaElemento(1:5),20),3)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 2.0 T_1 - 0.997 T_{in} \\ 2.0 T_2 - 1.99 T_1 + 0.994 T_{in} \\ 1.99 T_1 - 1.99 T_2 + 2.0 T_3 - 0.992 T_{in} \\ 1.99 T_2 - 1.98 T_1 - 1.99 T_3 + 2.0 T_4 + 0.989 T_{in} \\ 1.98 T_1 - 1.98 T_2 + 1.99 T_3 - 1.99 T_4 + 2.0 T_5 - 0.986 T_{in} \end{pmatrix}$$

Compilación (traducción) de expresión simbólica a función numérica

Las transformamos a numérico para poder usarlas en los solver de ecs. diferenciales ordinarias:

```
EcEstadoFE_num=matlabFunction(EcsEstadoCadaElemento,'Vars',{Tvector,F,Q,Tin})
```

EcEstadoFE_num = function handle with value:

```
@(in1,F,Q,Tin)[Q./4.18e+4-in1(1,:).*(7.0./8.36e+2)-F.*(in1(1,:)-Tin).*9.986064121362665e+3;Q./4.18e+4-
```

Los argumentos son el vector de estado "in1" (vector de N temperaturas), caudal F , potencia Q y temperatura de entrada T_{in} (entradas al sistema). Modela f para un modelo $\dot{x} = f(x, u)$, devolviendo un vector con las N derivadas de la temperatura media de cada elemento.

```
cosa=EcEstadoFE_num(randn(N,1),2,1,12);
size(cosa) %un vector de N números
```

```
ans = 1×2
      50      1
```

Simulación (no lineal)

Variables de entrada (arbitrarias) con cambios en escalón:

```
Q_t=@(t) 8000*(t>2500); %Potencia calorífica entrada
F_t=@(t) F_pf+0.0001*sign(sin(t/360+0.5)); %Caudal entrada
Tin_t=@(t) 15+5*sign(sin(pi*t/1700)); %Temp. entrada
```

*Realmente, los cambios "escalón" tienen componentes de "alta frecuencia". En aplicaciones con un perfil de entrada más "suave" (menos ancho de banda) las diferencias entre los modelos serían menores.

Modelo sin dinámica

Como primer paso, simulemos el modelo puramente estacionario, estático (sin `odexxx`, por supuesto, o sea que no es realmente una "simulación" entendida como "integración numérica" dado que no hay ecs. diferenciales que integrar en este modelo), dado por (recordar que λ realmente es $\lambda(F)$, depende del caudal:

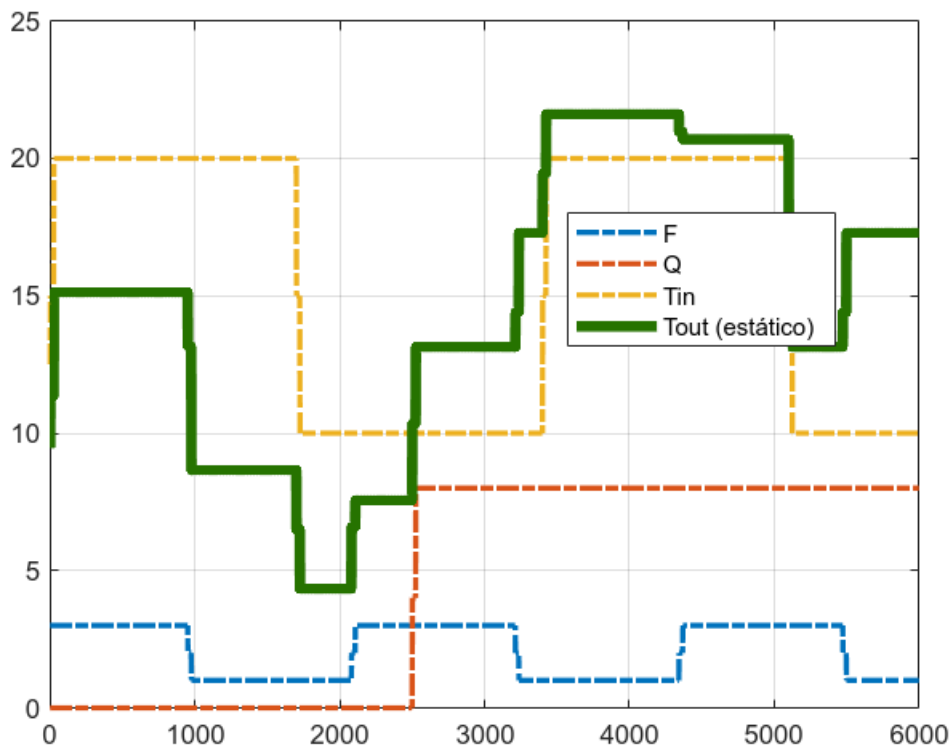
$$T_{out} = T_{eq}(L) = T_{in} \cdot e^{-\lambda(F) \cdot L} + (1 - e^{-\lambda(F) \cdot L}) \bar{\kappa}^{-1} \cdot \bar{Q}_{eq} := T_{out}(F, \bar{Q}_{eq}, T_{in})$$

*Este sería el modelo usado en la mayoría de aplicaciones si el tiempo de residencia es corto comparado con otras constantes de tiempo del proceso del que este calentador tubular sea un subsistema.

```
T_final=6000;
TT=(0:2:T_final)'; %tiempos para el modelo estático (no ODE integration, just evaluation)
tic
Tsol_estatico=ganTin(F_t(TT),Ltot).*Tin_t(TT)+ganQ(F_t(TT),Ltot).*Q_t(TT)/1000;
toc
```

Elapsed time is 0.013446 seconds.

```
plot(TT,[F_t(TT)*1e4 Q_t(TT)*1e-3 Tin_t(TT)], LineWidth=2, LineStyle='-.'), grid on, hold on
plot(TT, Tsol_estatico, LineWidth=4, Color=[0.15 0.45 0]), hold off
legend("F", "Q", "Tin", "Tout (estático)", Location="best")
```



Modelo dinámico

Integración numérica del modelo de elementos finitos

```
options = odeset('RelTol',1e-5,'AbsTol',1e-4) ;
ModeloFENum=@(t,T) EcEstadoFE_num(T,F_t(t),Q_t(t),Tin_t(t));
tic
[tiempo,Tsol]=ode15s(ModeloFENum,[0 T_final],zeros(N,1),options);
toc
```

Elapsed time is 1.386102 seconds.

```
length(tiempo)
```

```
ans = 6066
```

```
%tic
%[tiempo,Tsol]=ode45(ModeloFENum,[0 T_final],zeros(N,1),options);
%toc
length(tiempo)
```

```
ans = 6066
```

En este sistema de orden elevado parece que `ode15s` resulta más eficiente que `ode45` para las mismas tolerancias.

La variable Tsol tiene todas las variables de "estado" (temperaturas medias de cada elemento). La temperatura de "salida" del depósito será:

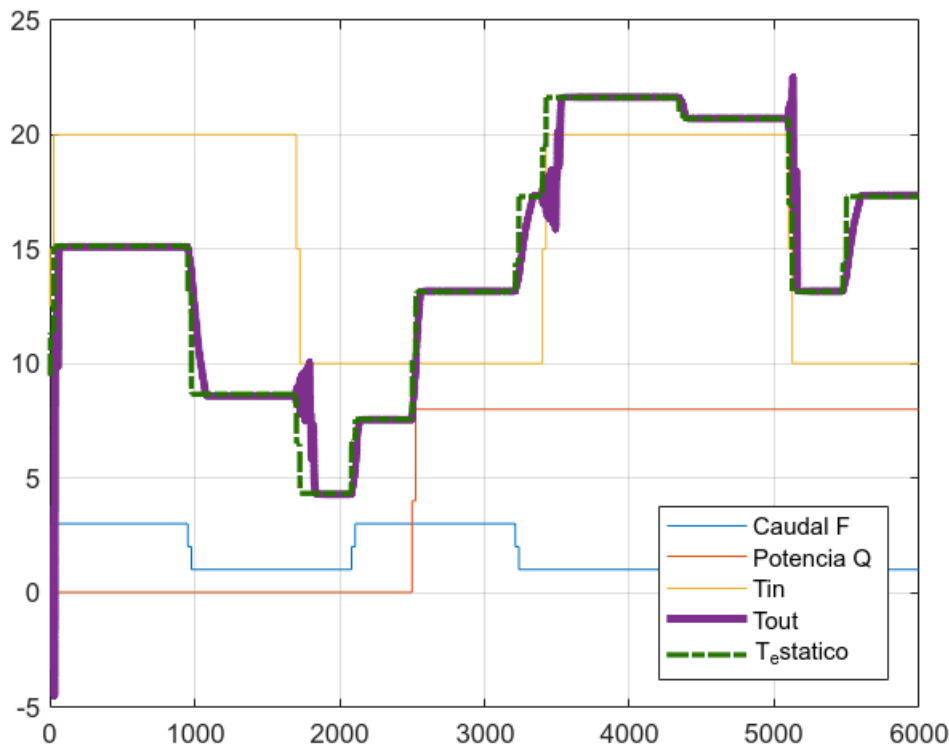
```
ES_num=matlabFunction(EcSalidalelem)
```

```
ES_num = function_handle with value:  
@(T,Tin)T.*1.997212824272533-Tin.*9.972128242725331e-1
```

```
if(N>1)  
    Tsol_salida=ES_num(Tsol(:,end),Tsol(:,end-1));  
else  
    Tsol_salida=ES_num(Tsol(:,end),Tin_t(tiempo));  
end
```

Representación gráfica de la solución:

```
plot(tiempo,[F_t(tiempo)*1e4 Q_t(tiempo)*1e-3 Tin_t(tiempo)]), grid on, hold on  
plot(tiempo,Tsol_salida,LineWidth=3), grid on,  
plot(TT,Tsol_estatico,'-.',LineWidth=2,Color=[0.15 0.45 0])  
hold off  
legend("Caudal F","Potencia Q","Tin","Tout","T_estatico",Location="best")
```



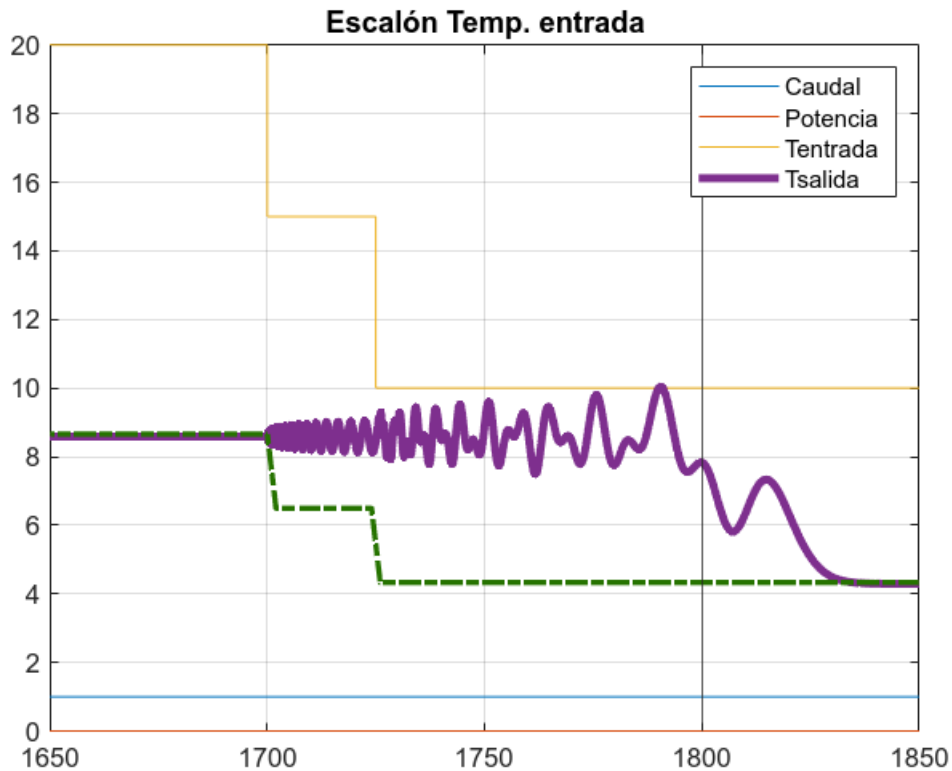
Trozo simulación 1: sin calor, cambio escalón en T entrada

```
plot(tiempo,[F_t(tiempo)*1e4 Q_t(tiempo)*1e-3 Tin_t(tiempo)]), grid on, hold on  
%plot(tiempo,Tsol(:,end),LineWidth=3), grid on,  
plot(tiempo,Tsol_salida,LineWidth=3), grid on
```

```
plot(TT,Tsol_estatico,"-.",LineWidth=2,Color=[0.15 0.45 0])
%la solución exacta es un retraso (no estamos dando potencia), de
%longitud/velocidad=volumen/caudal
retraso=S*Ltot/(F_pf-0.0001)
```

```
retraso = 100
```

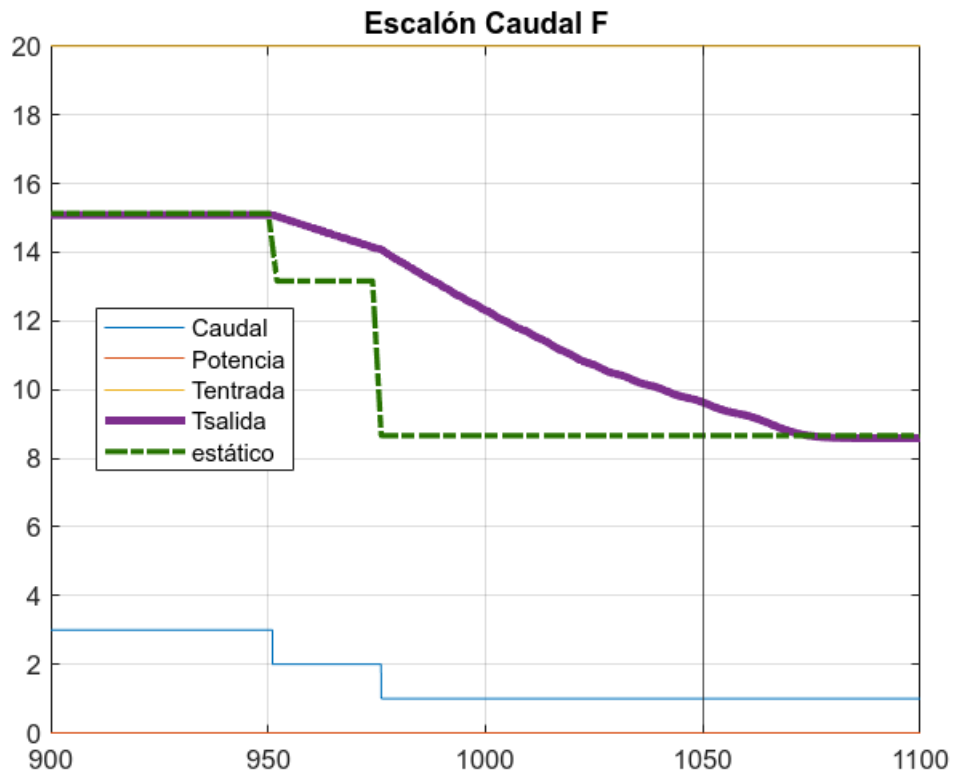
```
xline(1700+retraso)
hold off
xlim([1650 1850])
legend("Caudal","Potencia","Tentrada","Tsalida")
title("Escalón Temp. entrada")
```



La solución EDP exacta (retardo de transporte) sería un escalón (atenuado) en Tsalida...

Trozo simulación 2: sin calor, cambio escalón en caudal

```
plot(tiempo,[F_t(tiempo)*1e4 Q_t(tiempo)*1e-3 Tin_t(tiempo)]), grid on, hold on
plot(tiempo,Tsol_salida,LineWidth=3), grid on,
plot(TT,Tsol_estatico,"-.",LineWidth=2,Color=[0.15 0.45 0])
xline(950+retraso)
hold off
xlim([900 1100])
legend("Caudal","Potencia","Tentrada","Tsalida","estático","location","best")
title("Escalón Caudal F")
```

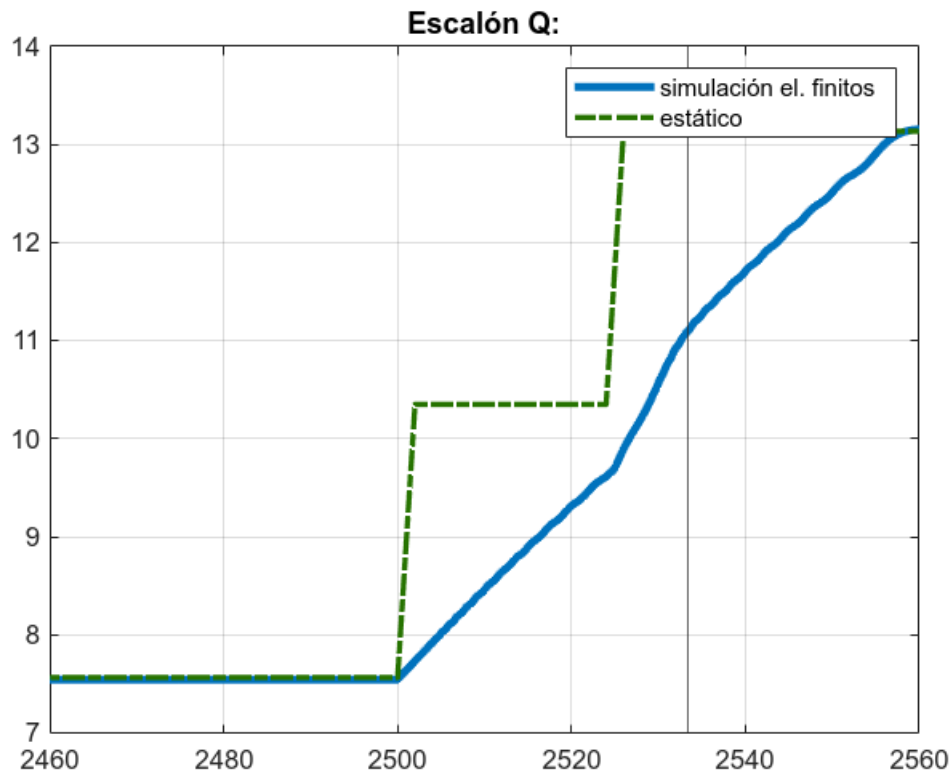


Trozo simulación 3: cambio escalón en potencia calorífica Q entrada

```
plot(tiempo,Tsol_salida,LineWidth=3), grid on, hold on
plot(TT,Tsol_estatico,'-.',LineWidth=2,Color=[0.15 0.45 0]), hold off
retraso=S*Ltot/(F_pf+0.0001)
```

```
retraso = 33.3333
```

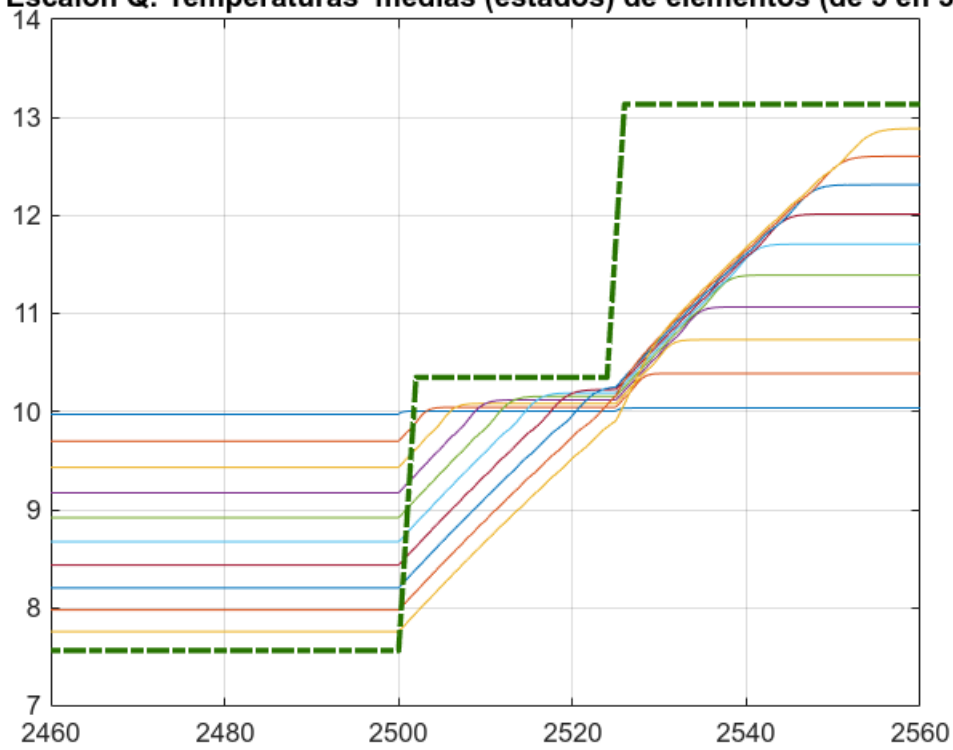
```
xline(2500+retraso)
xlim([2460 2560])
title("Escalón Q:"), legend("simulación el. finitos","estático")
```



Simulaciones observando variables (temperaturas) en elementos intermedios

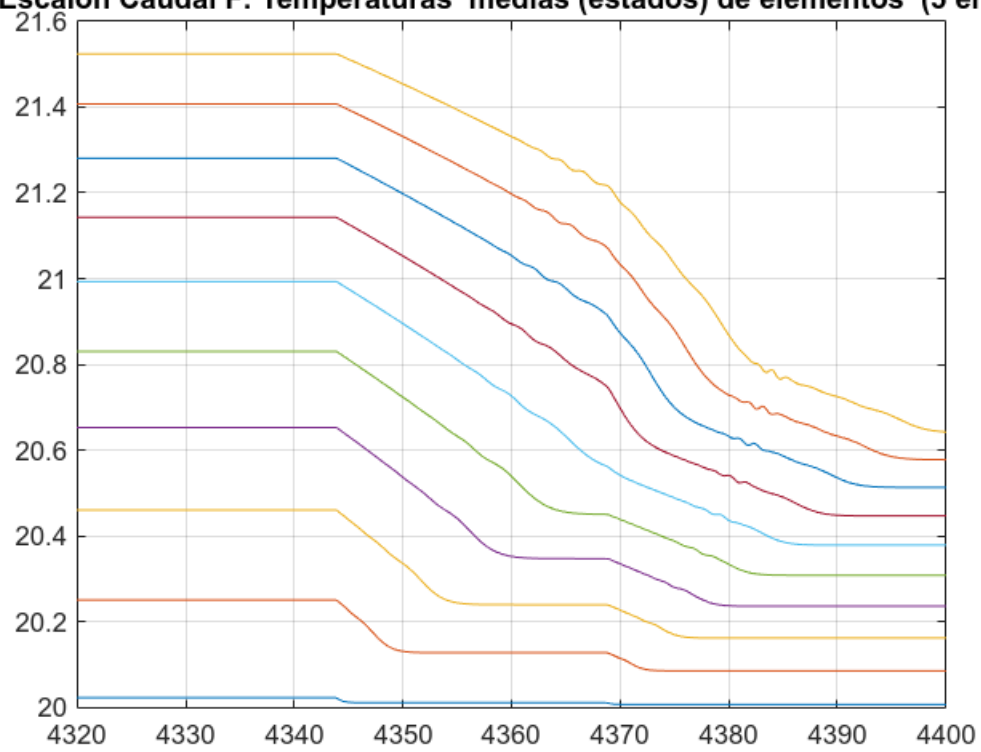
```
plot(tiempo,Tsol(:,1:5:end)), grid on, hold on
plot(TT,Tsol_estatico,'-.',LineWidth=2,Color=[0.15 0.45 0]), hold off
xlim([2460 2560])
title("Escalón Q: Temperaturas medias (estados) de elementos (de 5 en 5)")
```

Escalón Q: Temperaturas medias (estados) de elementos (de 5 en 5)

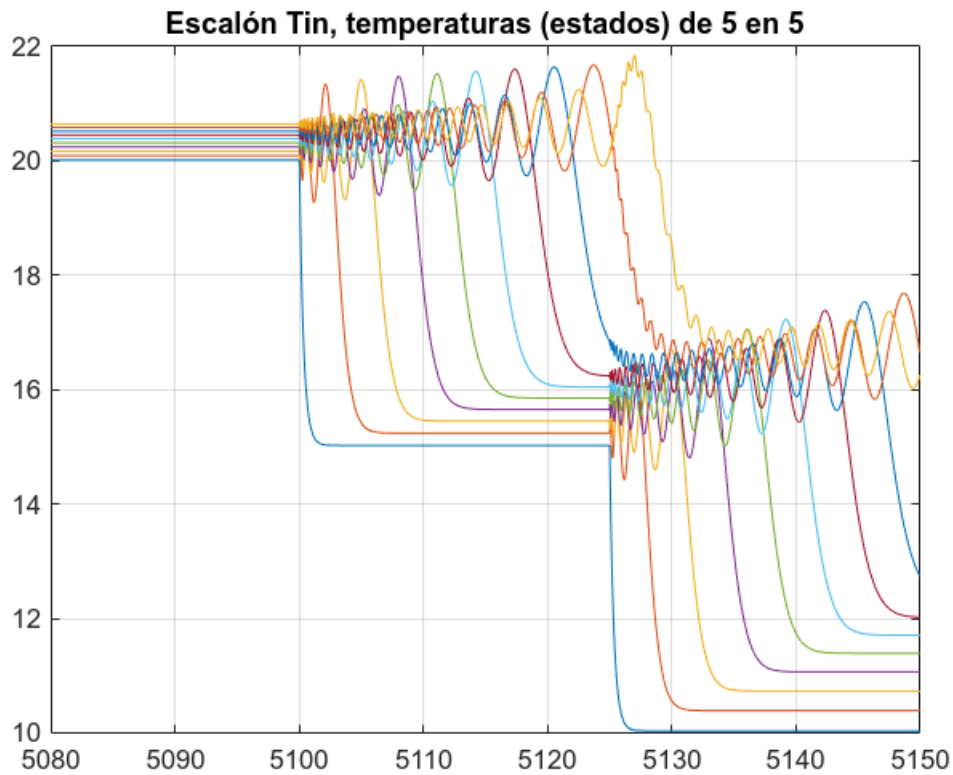


```
plot(tiempo,Tsol(:,1:5:end))
xlim([4320 4400]), grid on
title("Escalón Caudal F: Temperaturas medias (estados) de elementos (5 en 5)")
```

Escalón Caudal F: Temperaturas medias (estados) de elementos (5 en 5)



```
plot(tiempo,Tsol(:,1:5:end))  
xlim([5080 5150]), grid on  
title("Escalón Tin, temperaturas (estados) de 5 en 5")
```



Conclusiones

Simular el transitorio del intercambiador puede ser "infinitamente complejo"... o primer orden. Si este modelo es, a su vez, un subsistema de un sistema mayor, no puede tener un gran coste de cómputo su simulación... hay que determinar un número de elementos "razonable" según el "ancho de banda esperado" (rapidez de los cambios) de las señales entrantes o la precisión y ancho de banda requeridos para las señales "salientes" que a su vez entren a otros procesos... de hecho, el modelo más sencillo sería "estático" sólo la ganancia que es el que se gasta en muchísimos sitios... con razón, posiblemente. Quizás el único entorno de ingeniería donde los modelos dinámicos (o los retardos de la EDP) tengan sentido es en el diseño de controladores basados en modelos para controlar con cierta rapidez la temperatura de salida.