Identificación experimental "caja negra" ante escalón: procesos de 2º orden oscilatorios sin ceros (o con ceros usando procest)

Presentaciones en vídeo:

--- http://personales.upv.es/asala/YT/V/ord2idg.html

--- http://personales.upv.es/asala/YT/V/ord2idb.html

Este código funcionó sin errores con Matlab `R2022b` (Linux)

Objetivo: comprender la **identificación experimental** rápida "caja negra" (sin saber la física de primeros principios subyacente) en el caso de respuesta ante **escalón** de sistema lineal de **segundo** orden (sin ceros) ***subamortiguado*** (esto es, con transitorio oscilatorio).

Tabla de Contenidos

Teoría: polos de un sistema de segundo orden en forma "coef. de amortiguamiento (xi), frecuencia natural (omega_n)"

Un sistema de segundo orden lineal dado por la EDO:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_n\frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 \cdot u$$

con condiciones iniciales nulas, representado en el dominio de Laplace con $Y(s) = G(s)U(s)$, siendo

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

su función de transferencia, con $\omega_n > 0$, $0 < \xi < 1$, tiene unos polos (raíces del denominador) dados por:

$$\frac{1}{2}\left(-2\xi\omega_n \pm \sqrt{(2\xi\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(-2\xi\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right) = \left(-\xi \pm j\cdot\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_n$$

cuya parte real es $-\xi\omega_n$, y parte imaginaria $\omega_p = \pm\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$. Módulo raíces = ω_n.ESTABLE.

Teoría: respuesta escalon de sistemas de 2o orden oscilatorios sin ceros

Calculemos la respuesta temporal ante $u(t) = A$, o sea $U(s) = A \cdot \frac{1}{s}$ en dominio de Laplace, dada por la fórmula que obtendrá la Symbolic toolbox con:

```
syms A K xi omega_n real
assume(0<=xi<1) %par de raíces complejas
assume(omega_n>0) %si no, saldrá inestable...
syms s
Y= A/s    *    K*omega_n^2/(s^2+2*xi*omega_n*s+omega_n^2);
syms t real
Y(t)=simplify(ilaplace(Y))
```

Y(t) =

$$A\,K - A\,K\,\mathrm{e}^{-\omega_n t\,\xi}\left(\cos\left(\omega_n t\,\sqrt{1-\xi^2}\right) + \frac{\xi\sin\left(\omega_n t\,\sqrt{1-\xi^2}\right)}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

Lo "importante" es que son senos y cosenos modulados por exponencial que se suman al punto de equilibrio (valor final) AK.

Parámetros característicos de la respuesta

Valor final

Es AK. También sale de la ecuación $y_{eq} = G(0)u_{eq}$, válida para cualquier FdT.

Por tanto, para identificación, si sabemos la amplitud de la entrada A, podemos inmediatamente despejar K.

Tiempo de establecimiento

El transitorio dura (igualando la exponencial a 0.04321), criterio 95.68%, digamos grosso modo 96%:

```
vpa(log(0.04321)/-omega_n/xi,5)
```

ans =

$$\frac{3.1417}{\omega_n\,\xi}$$

O, puestos a decir, el transitorio dura (igualando la exponencial a 0.0183), criterio 98.2%

```
vpa(log(0.0183)/-omega_n/xi,3)
```

ans =

$$\frac{4.0}{\omega_n\,\xi}$$

Como es difícil de "medir experimentalmente", estimaremos ω_n y ξ de otra forma, y luego se gastará la fórmula de tiempo de establecimiento para comprobar que "todo cuadra".

Oscilaciones: frecuencia propia, tiempo de pico, valor máximo y sobreoscilación

- A la frecuencia de las oscilaciones se le denomina frecuencia PROPIA (y es, claro, la parte IMAGINARIA de los polos):

```
w_propia=omega_n*sqrt(1-xi^2)
```

w_propia = $\omega_n\,\sqrt{1-\xi^2}$

```
t_1erpico=pi/w_propia %el pico se produce en un semiperíodo
```

t_1erpico =

$$\frac{\pi}{\omega_n\,\sqrt{1-\xi^2}}$$

Para identificación, se mide el tiempo de pico o el período de las oscilaciones (lo denominaremos T_{medido}), y se despeja la frecuencia propia (debería dar lo mismo):

$$\omega_p = \frac{\pi}{t_{pico}}, \quad \omega_p = \frac{2\pi}{T_{medido}}$$

- El valor de la salida en ese primer pico es:

```
Ymaxima=simplify(Y(t_1erpico))
```

Ymaxima =

$$A\,K + A\,K\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Al rebasamiento (porcentual) sobre el valor final se le denomina sobreoscilación (usualmente llamado δ en los libros de texto):

```
SobreOsc=(Ymaxima-A*K)/(A*K)
```

SobreOsc =

$$\mathrm{e}^{-\frac{\pi\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Para identificación, se "mide" la sobreoscilación δ, y se despeja ξ:

```
syms delta real
assume(delta>0)
xfd=solve(SobreOsc==delta, xi)
```

Warning: Solutions are only valid under certain conditions. To include parameters and conditions in the solution, specify the 'ReturnConditions' value as 'true'.

xfd =

$$-\frac{\log(\delta)}{\sqrt{\log(\delta)^2 + \pi^2}}$$

```
xi_from_delta=matlabFunction(xfd);
```

- Con la frecuencia propia (estimada con el período observado o/y tiempo 1er pico), y ξ (estimado con la sobreoscilación), podemos despejar ω_n:

$$\omega_n = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Ejemplos numéricos identificación experimental

```
s=tf('s');
load experimentosOrd2.mat
```

Ejemplo 1 (todo cuadra perfecto)

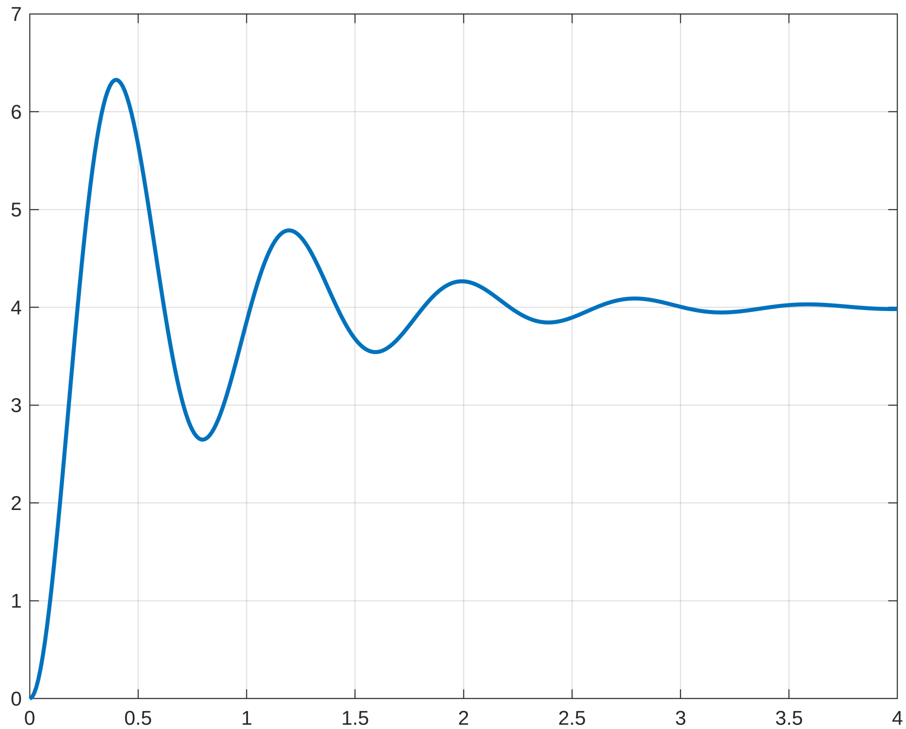
Vamos a ver la respuesta, y luego usaremos fórmulas

La amplitud del escalón es:

```
Amplitud1
```

```
Amplitud1 = 2
```

```
plot(T,Y1,LineWidth=2),grid on
```



Si "medimos" cosas en la gráfica, tenemos que:

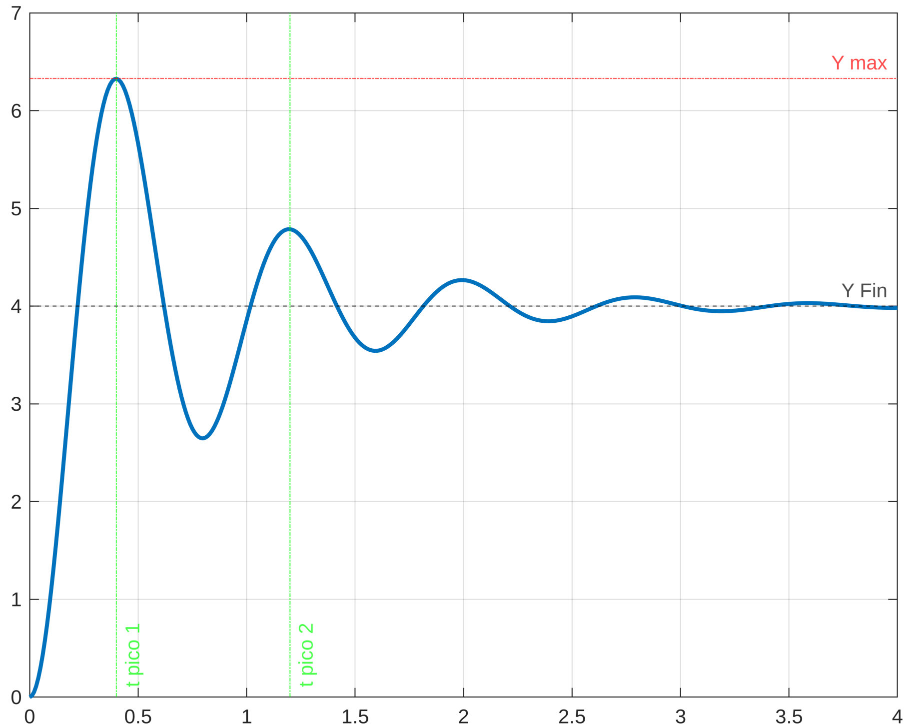
```
t_pico1experim=0.4;
t_segundopico=1.2;
periodo_experimental=t_segundopico-t_pico1experim
```

```
periodo_experimental = 0.8000
```

```
ValFin=4;
ValMax=6.33;
```

En efecto, superponiendo los datos y las medidas:

```
plot(T,Y1,LineWidth=2), grid on
yline(ValMax,'-.r',Label="Y max"), yline(ValFin,'--k',Label="Y Fin"),
xline(t_pico1experim,'-.g',Label="t pico 1",LabelVerticalAlignment="bottom")
xline(t_segundopico,'-.g',Label="t pico 2",LabelVerticalAlignment="bottom")
```



Por tanto ante escalon de la amplitud de entrada dada:

```
K=ValFin/Amplitud1
```

```
K = 2
```

```
delta_experimento=(ValMax-ValFin)/ValFin
```

```
delta_experimento = 0.5825
```

```
omega_p=pi/t_pico1experim
```

```
omega_p = 7.8540
```

```
%debería coincidir con la frecuencia de las oscilacioens a partir del
%período experimental
2*pi/periodo_experimental
```

```
ans = 7.8540
```

```
xi=xi_from_delta(delta_experimento)
```

```
xi = 0.1695
```

```
omega_n=omega_p/sqrt(1-xi^2)
```

```
omega_n = 7.9693
```

```
t_est_estimado=pi/xi/omega_n %crit. 96%
```

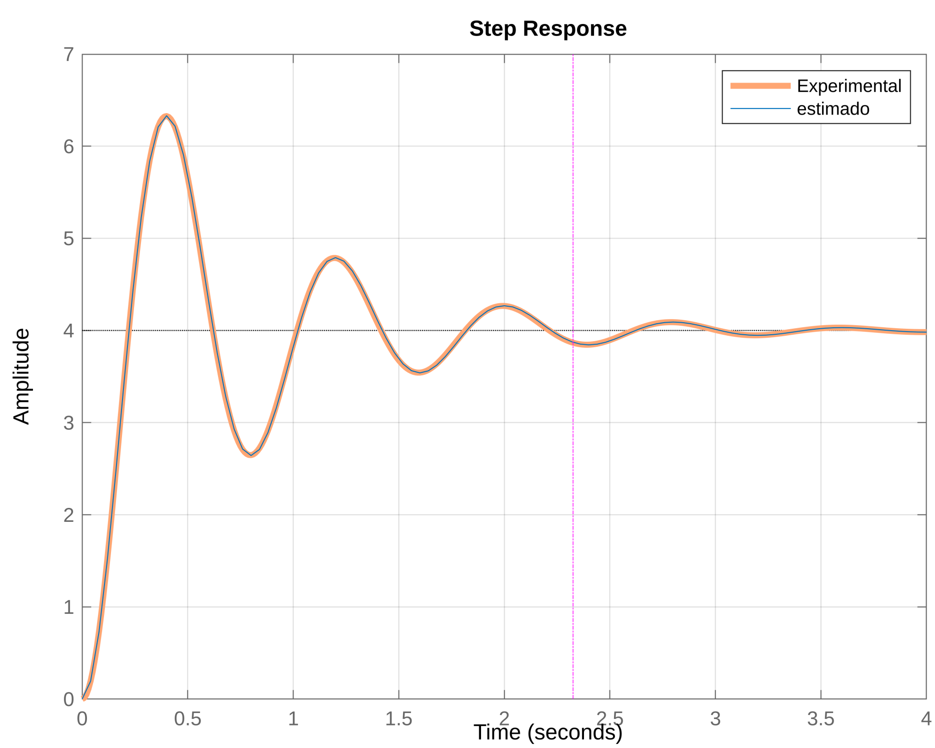
```
t_est_estimado = 2.3253
```

```
G_estimado=K*omega_n^2/(s^2+2*xi*omega_n*s+omega_n^2)
```

```
G_estimado =
 
          127
  ---------------------
  s^2 + 2.702 s + 63.51
 
Continuous-time transfer function.
```

Comprobemos que se parece la respuesta escalón:

```
plot(T,Y1,LineWidth=3,Color=[1 .65 .45]);
hold on
step(G_estimado*Amplitud1,4)
xline(t_est_estimado,'-.m')
hold off, grid on, legend("Experimental","estimado")
```



Ejemplo 2 (no tan "bonito")

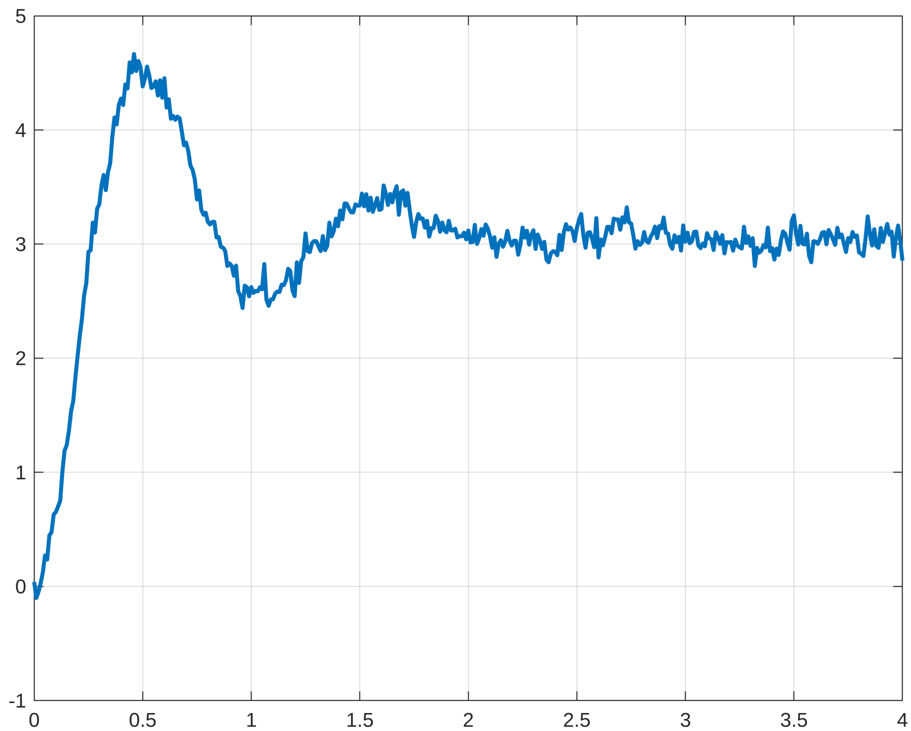
Vamos a ver la respuesta, y luego usaremos fórmulas

La amplitud del escalón es:

```
Amplitud2
```

```
Amplitud2 = 1.2500
```

```
plot(T,Y2,LineWidth=2),grid on
```



Si "medimos" datos del experimento, tenemos que:

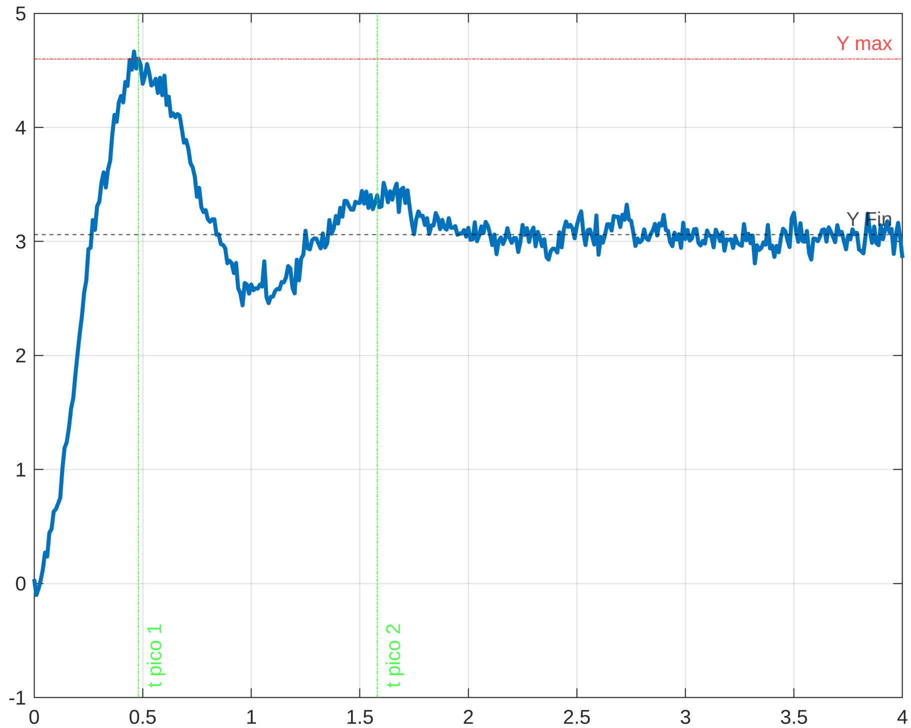
```
t_pico1experim=0.48; %uyyy, deberia ser medio periodo
t_segundopico=1.58; %deberian ser 3 semiperiodos, triple de 1er pico...
periodo_experimental=t_segundopico-t_pico1experim
```

```
periodo_experimental = 1.1000
```

```
ValFin=3.06;
ValMax=4.6;
```

En efecto, superponiendo:

```
plot(T,Y2,LineWidth=2), grid on
yline(ValMax,'-.r',Label="Y max"), yline(ValFin,'--k',Label="Y Fin"),
xline(t_pico1experim,'-.g',Label="t pico 1",LabelVerticalAlignment="bottom")
xline(t_segundopico,'-.g',Label="t pico 2",LabelVerticalAlignment="bottom")
```



Por tanto ante escalon de la amplitud de entrada dada:

```
K=ValFin/Amplitud2
```

```
K = 2.4480
```

```
delta_experimento=(ValMax-ValFin)/ValFin
```

```
delta_experimento = 0.5033
```

```
omega_p_opcion1=pi/t_pico1experim
```

```
omega_p_opcion1 = 6.5450
```

Debería coincidir con la frecuencia de las oscilaciones, que a partir del período medido es:

```
omega_p_opcion2=2*pi/periodo_experimental
```

```
omega_p_opcion2 = 5.7120
```

pero no coindice... Se me ocurre promediar:

```
omega_p=0.5*(omega_p_opcion2+omega_p_opcion1)
```

```
omega_p = 6.1285
```

```
xi=xi_from_delta(delta_experimento)
```

```
xi = 0.2135
```

```
omega_n=omega_p/sqrt(1-xi^2) %¿con la del pico o con la observada (período)?
```

```
omega_n = 6.2732
```

```
t_est_estimado=pi/xi/omega_n %crit. 96%
```

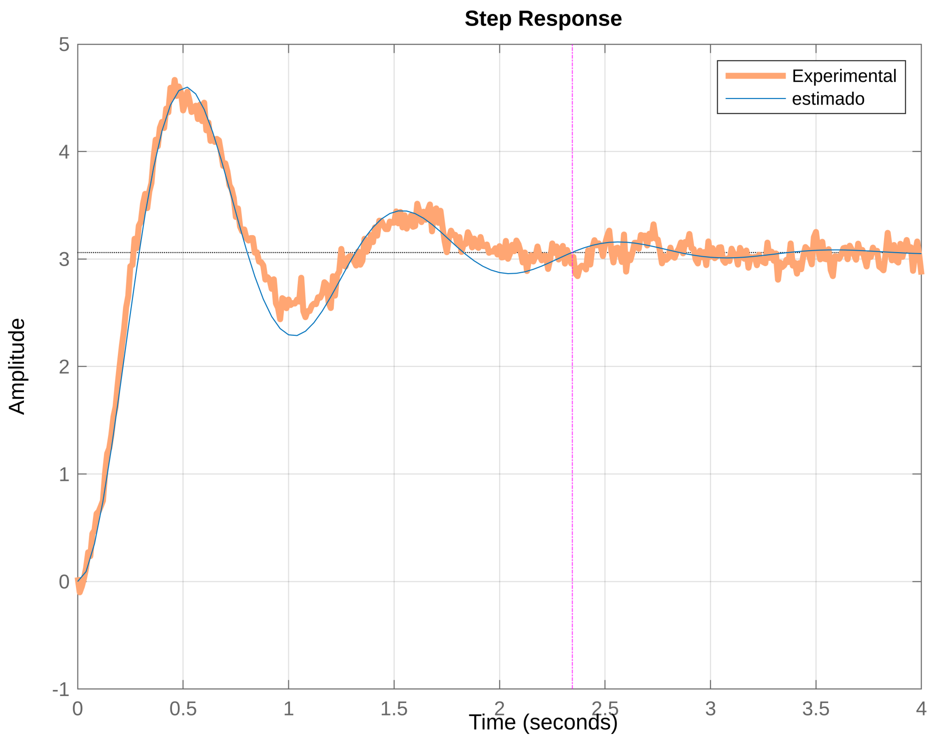
```
t_est_estimado = 2.3454
```

```
G_estimado=K*omega_n^2/(s^2+2*xi*omega_n*s+omega_n^2)
```

```
G_estimado =
 
          96.33
  ---------------------
  s^2 + 2.679 s + 39.35
 
Continuous-time transfer function.
```

Comprobemos si se parece simulación a experimento:

```
plot(T,Y2,LineWidth=3,Color=[1 .65 .45]);
hold on
step(G_estimado*Amplitud2,4)
xline(t_est_estimado,'-.m')
hold off, grid on, legend("Experimental","estimado")
```



identificación con procest

Si queremos ajustar simulación a experimento minimizando un índice de mínimos cuadrados, podemos gastar la System Identification Toolbox:

```
Ts=T(2)-T(1) %período de muestreo
```

```
Ts = 0.0100
```

```
IDD=iddata([zeros(10,1);Y2],[zeros(10,1);Amplitud2*ones(size(T'))],Ts);
model1=procest(IDD,'P2U',procestOptions(InitialCondition="zero"))
```

```
model1 =

Process model with transfer function:
                  Kp
  G(s) = ---------------------
         1+2*Zeta*Tw*s+(Tw*s)^2

         Kp = 2.4845
         Tw = 0.15824
       Zeta = 0.24705

Parameterization:
    {'P2U'}
   Number of free coefficients: 3
   Use "getpvec", "getcov" for parameters and their uncertainties.

Status:
Estimated using PROCEST on time domain data "IDD".
Fit to estimation data: 85.77%
```

```
FPE: 0.01409, MSE: 0.01388

Model Properties
```

```
zpk(model1)
```

```
ans =

  From input "u1" to output "y1":
          99.22
  ----------------------
  (s^2 + 3.122s + 39.93)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
model2=procest(IDD,'P2UZ',procestOptions(InitialCondition="zero")) %con cero en numerac
```

```
model2 =

Process model with transfer function:
                     1+Tz*s
  G(s) = Kp * ----------------------
              1+2*Zeta*Tw*s+(Tw*s)^2

         Kp = 2.4759
         Tw = 0.1661
       Zeta = 0.25312
         Tz = 0.029807

Parameterization:
    {'P2UZ'}
   Number of free coefficients: 4
   Use "getpvec", "getcov" for parameters and their uncertainties.

Status:
Estimated using PROCEST on time domain data "IDD".
Fit to estimation data: 88.2%
FPE: 0.00973, MSE: 0.009543

Model Properties
```

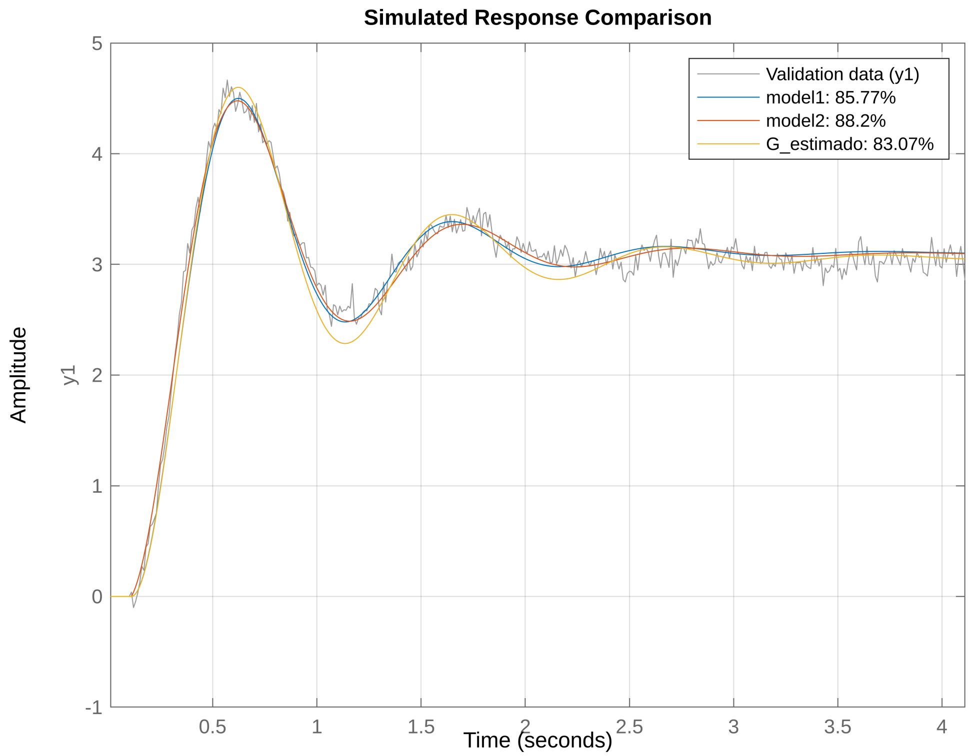
```
zpk(model2)
```

```
ans =

  From input "u1" to output "y1":
     2.675 (s+33.55)
  ----------------------
  (s^2 + 3.048s + 36.25)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
compare(model1,model2,G_estimado,IDD,compareOptions(InitialCondition="zero")), grid on
```


Simulated Response Comparison
Validation data (y1)
model1: 85.77%
model2: 88.2%
G_estimado: 83.07%
Amplitude
y1
Time (seconds)
5
4
3
2
1
0
-1
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4