Modelado de sistemas inciertos como modelos **politópicos** para control **planificación de ganancia**

Presentación en vídeo: http://personales.upv.es/asala/YT/V/modelgs.html

Este código funcionó correctamente con `Matlab` **`R2020a`**, **`Sedumi1.3`**, **`YalmipR20200116`** (via *`tbxmanager`*)

Objetivo:

Revisar cómo un modelo con parámetros inciertos puede considerarse como un sistema politópico y cómo calcular los coeficientes de interpolación en planificación de ganancia.

Ejemplo de modelado

```
Abase = [-1.2  -0.5  1.2   0; ...
    -1.1   -0.9    0.8   -0.2;...
    -0.6    0.7   -1.2   -0.6;...
    -1.1   -0.4   -0.4   -1.6];
Amul1 =... %lo que multiplica a theta_1
    [0    -1     0     0;...
    0     0     0     0;...
    0     1     0     0;...
    0     0     0     0];
Amul2 =... %lo que multiplica a theta_2
    [0     0     0     0;...
    0     0     0     0;...
    -1    -1     1     0;...
    0     0     1     0];
Amul3 = ... %lo que multiplica a theta_3
    [-1     0     0     1;...
    1    -1     1    -1;...
    0     0     0     0;...
    0     0     1     1];

syms theta_1 theta_2 theta_3 real
Asym=vpa(Abase+Amul1*theta_1+Amul2*theta_2+Amul3*theta_3,3)
```

Asym =

$$\begin{pmatrix} -1.0\,\theta_3-1.2 & -1.0\,\theta_1-0.5 & 1.2 & \theta_3 \\ \theta_3-1.1 & -1.0\,\theta_3-0.9 & \theta_3+0.8 & -1.0\,\theta_3-0.2 \\ -1.0\,\theta_2-0.6 & \theta_1-1.0\,\theta_2+0.7 & \theta_2-1.2 & -0.6 \\ -1.1 & -0.4 & \theta_2+\theta_3-0.4 & \theta_3-1.6 \end{pmatrix}$$

```
Bbase=[2.5    0.3   -1.4   -1.3]';
Bmul1=[ -0.4  0  -2.2  -1.4]';%lo que multiplica a theta_1
Bmul2=[1.3  2.1  0.7  -0.3]';%lo que multiplica a theta_2
Bmul3=[-0.4 -0.4  0.3  -0.7]';%lo que multiplica a theta_3
```

```
Bsym=vpa(Bbase+Bmul1*theta_1+Bmul2*theta_2+Bmul3*theta_3,3)
```

Bsym =

$$\begin{pmatrix} 1.3\,\theta_2 - 0.4\,\theta_1 - 0.4\,\theta_3 + 2.5 \\ 2.1\,\theta_2 - 0.4\,\theta_3 + 0.3 \\ 0.7\,\theta_2 - 2.2\,\theta_1 + 0.3\,\theta_3 - 1.4 \\ -1.4\,\theta_1 - 0.3\,\theta_2 - 0.7\,\theta_3 - 1.3 \end{pmatrix}$$

Supondremos que $\theta_1(x,t)$, $\theta_2(x,t)$ o $\theta_3(x,t)$ son bien no linealidades o bien parámetros que varían en los rangos conocidos siguientes:

```
th1_rango=[-.2 .2]; th2_rango=[-.5 .5]; th3_rango=[-0.3 0.3];
```

Ejemplo: $\theta_1(x) = 0.2\sin(x_1 - x_2^2)$, $\theta_2(x) = e^{-x_3^2} - 0.5$, $\theta_3(t)$ una variable externa que influye de forma "producto por estados" en el proceso, medible (si influyera "aditivamente" sería una entrada de tipo "perturbación").

Calculemos los 8 **modelos vértice**:

```
conta=0;
for k1=1:2
  for k2=1:2
     for k3=1:2
        conta=conta+1;
        A{conta}=Abase+Amul1*th1_rango(k1)+Amul2*th2_rango(k2)+Amul3*th3_rango(k3);
        B{conta}=Bbase+Bmul1*th1_rango(k1)+Bmul2*th2_rango(k2)+Bmul3*th3_rango(k3);
     end
  end
end
r=length(A); N=size(A{1},1);
```

Fórmula de los interpoladores h_i a partir de parámetros conocidos:

Si conociésemos el valor de los tres parámetros θ_1, θ_2 y θ_3, se podrían calcular de forma muy sencilla los interpoladores $\alpha_{k_1}, \beta_{k_2}, \gamma_{k_3}$ con $k_1 \in \{1,2\}, k_2 \in \{1,2\}, k_3 \in \{1,2\}$ tal que:

$$\theta_1 = \alpha_1 * (-0.2) + \alpha_2 * (0.2),\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1;$$

$$\theta_2 = \beta_1 * (-0.5) + \beta_2 * (0.5),\ \beta_1 + \beta_2 = 1;$$

$$\theta_3 = \gamma_1 * (-0.3) + \gamma_2 * (0.3),\ \gamma_1 + \gamma_2 = 1.$$

Con ellos, siguiendo el mismo orden que en el bucle "`for k1 ... for k2 ... for k3`" de arriba, se puede probar que los interpoladores del modelo politópico son:

$$h_1 = \alpha_1\beta_1\gamma_1,\ h_2 = \alpha_1\beta_1\gamma_2,\ h_3 = \alpha_1\beta_2\gamma_1,\ h_4 = \alpha_1\beta_2\gamma_2,$$

$$h_5 = \alpha_2\beta_1\gamma_1,\ h_6 = \alpha_2\beta_1\gamma_2,\ h_7 = \alpha_2\beta_2\gamma_1,\ h_8 = \alpha_2\beta_2\gamma_2$$

En efecto... usando la symbolic toolbox con $b_1 = 2.5 - 0.4\theta_1 + 1.3\theta_2 - 0.4\theta_3$, resulta:

```
syms alpha_1 alpha_2 beta_1 beta_2 gamma_1 gamma_2 real
th1=alpha_1*th1_rango(1)+alpha_2*th1_rango(2);
th2=beta_1*th2_rango(1)+beta_2*th2_rango(2);
th3=gamma_1*th3_rango(1)+gamma_2*th3_rango(2);
b1=2.5-0.4*th1+1.3*th2-0.4*th3
```

```
b1 =
```

$$\frac{2\,\alpha_1}{25} - \frac{2\,\alpha_2}{25} - \frac{13\,\beta_1}{20} + \frac{13\,\beta_2}{20} + \frac{3\,\gamma_1}{25} - \frac{3\,\gamma_2}{25} + \frac{5}{2}$$

```
tambienb1=(alpha_1+alpha_2)*(beta_1+beta_2)*(gamma_1+gamma_2)*2.5 ...
      -0.4*th1*(beta_1+beta_2)*(gamma_1+gamma_2)+1.3*(alpha_1+alpha_2)*th2*(gamma_1+gam
      -0.4*(alpha_1+alpha_2)*(beta_1+beta_2)*th3;
vpa(expand(tambienb1))
```

`ans =` $2.05\,\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 + 1.81\,\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_2 + 3.35\,\alpha_1\,\beta_2\,\gamma_1 + 1.89\,\alpha_2\,\beta_1\,\gamma_1 + 3.11\,\alpha_1\,\beta_2\,\gamma_2 + 1.65\,\alpha_2\,\beta_1\,\gamma_2 + 3.19\,\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_1 + 2$

que coincide con los vértices de ese elemento de B calculados en el triple "for" anidado:

```
[B{1}(1) B{2}(1) B{3}(1) B{4}(1) B{5}(1) B{6}(1) B{7}(1) B{8}(1)]
```

```
ans = 1×8
    2.0500    1.8100    3.3500    3.1100    1.8900    1.6500    3.1900    2.9500
```

Se plantean, pues, dos posibilidades con este modelo:

1) que los parámetros sean ***desconocidos*** y, por tanto, el controlador no pueda depender de ellos $u = -Fx$, control **robusto**.

2) que los parámetros sean ***conocidos*** y, por tanto, se puedan calcular los α, β, γ y consecuentemente los h, y que se pueda hacer un controlador $u = -\left(\sum_{i=1}^{8} h_i(t)\cdot F_i\right)\cdot x$, que se conoce como control **con planificación de ganancia**, dado que como h depende de los θ se puede interpretar el control como $u = -F(\theta_1, \theta_2, \theta_3)x$.

***Nota:** también existen posibilidades *intermedias*, donde algún parámetro sea conocido y otros no, que por brevedad/simplicidad no se abordan aquí.