Análisis de los modos de vibración (amortiguada) libres de un sistema de 3 masas y 4 muelles

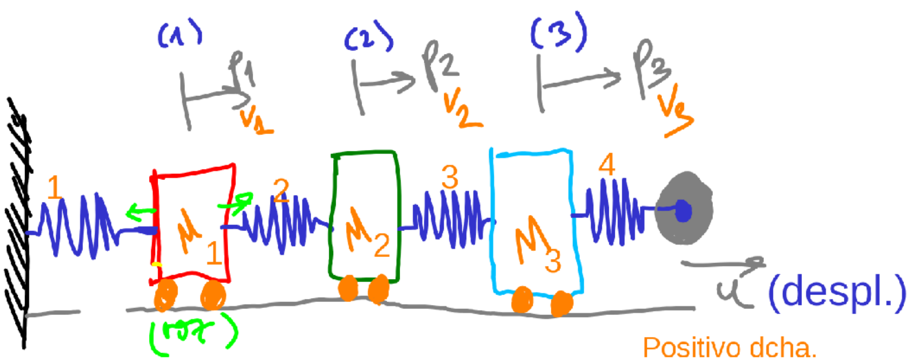
Este código ejecutó en Matlab **R2022a**

Presentación (vídeo): http://personales.upv.es/asala/YT/V/moll3free.html

Objetivo: analizar las propiedades de un sistema de 3 masas y 4 muelles en concreto sus "modos de vibración" en la respuesta libre. Serán parecidos pero no iguales a los modos "forzados" (frecuencias de resonancia), que se verán en otros vídeos.

Tabla de Contenidos

Modelado



La entrada es "movimiento del extremo", lo elegimos intencionalmente así. Otros vídeos de la colección analizan en detalle el modelado.

```
k=1; b=0.1; M=1; %parámetros constantes

%3 muelles (masa = 1 Kg)
A=[0 1 0 0 0 0; ...
    -2*k/M -b/M k/M 0 0 0;...
    0 0 0 1 0 0;...
    k/M 0 -2*k/M -b/M k/M 0;...
    0 0 0 0 0 1; ...
    0 0 k/M 0 -2*k/M -b/M];
```

```
B=[0;0;0;0;0;k/M];
```

La salida serán las tres posiciones

```
C=[1 0 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 1 0];
```

Usaremos la Control System Toolbox para simularlo y analizarlo:

```
sys=ss(A,B,C,0);
zpk(sys) %obsérvese el "grado relativo" de 6, 4, 2 respecto a la entrada.
```

```
ans =

  From input to output...
                                 1
   1:  -----------------------------------------------------------
       (s^2 + 0.1s + 0.5858) (s^2 + 0.1s + 2) (s^2 + 0.1s + 3.414)

                         (s^2 + 0.1s + 2)
   2:  -----------------------------------------------------------
       (s^2 + 0.1s + 0.5858) (s^2 + 0.1s + 2) (s^2 + 0.1s + 3.414)

                 (s^2 + 0.1s + 1) (s^2 + 0.1s + 3)
   3:  -----------------------------------------------------------
       (s^2 + 0.1s + 0.5858) (s^2 + 0.1s + 2) (s^2 + 0.1s + 3.414)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

Respuesta libre (c.i. no nulas), modos y propiedades

La respuesta es superposición de distintos modos independientes, obtenidos diagonalizando.

```
[V,D]=eig(A); %modos de vibración "propios"
V
```

```
V = 6×6 complex
   0.0064 + 0.2379i   0.0064 - 0.2379i  -0.0144 - 0.4080i  -0.0144 + 0.4080i ⋯
  -0.4397 + 0.0000i  -0.4397 - 0.0000i   0.5774 + 0.0000i   0.5774 + 0.0000i
  -0.0091 - 0.3364i  -0.0091 + 0.3364i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i
   0.6219 + 0.0000i   0.6219 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i
   0.0064 + 0.2379i   0.0064 - 0.2379i   0.0144 + 0.4080i   0.0144 - 0.4080i
  -0.4397 - 0.0000i  -0.4397 + 0.0000i  -0.5774 + 0.0000i  -0.5774 - 0.0000i
```

```
DD=diag(D)'
```

```
DD = 1×6 complex
  -0.0500 - 1.8471i  -0.0500 + 1.8471i  -0.0500 - 1.4133i  -0.0500 + 1.4133i ⋯
```

Todos los modos de la respuesta libre tienen el mismo "decay rate".

```
-pi./real(DD) %aprox. tiempo de establecimiento
```

```
ans = 1×6
   62.8319   62.8319   62.8319   62.8319   62.8319   62.8319
```

Tienen distinta frecuencia, ordenada abajo de menor a mayor:

```
frq=abs(imag(DD([5 3 1]))) %frecuencias "propias", ordenadas
```

```
frq = 1×3
    0.7637    1.4133    1.8471
```

Los períodos de oscilación de cada modo serían:

```
prd=2*pi./frq
```

```
prd = 1×3
    8.2270    4.4457    3.4017
```

Análisis del modo 1

```
autovalor_modo=DD(5)
```

```
autovalor_modo = -0.0500 - 0.7637i
```

```
autovalor_modo=DD(6)
```

```
autovalor_modo = -0.0500 + 0.7637i
```

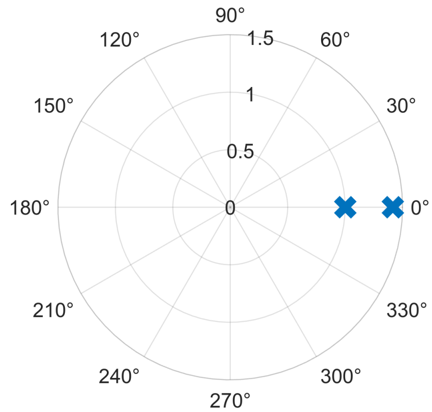
```
modo1=V([1 3 5],5) %sólo las coordenadas de posición
```

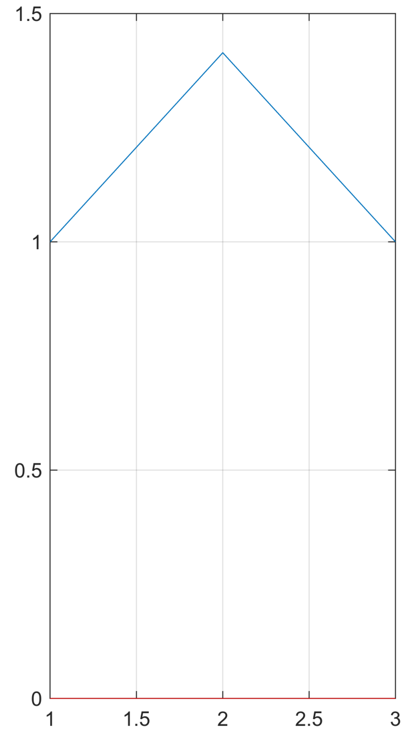
```
modo1 = 3×1 complex
   0.3971 - 0.0000i
   0.5615 + 0.0000i
   0.3971 + 0.0000i
```

```
modo1=modo1/modo1(1) %escalado o rotado, para que masa izq. tenga amplitud 1
```

```
modo1 = 3×1 complex
   1.0000 + 0.0000i
   1.4142 + 0.0000i
   1.0000 + 0.0000i
```

```
figure()
subplot(1,2,1)
polarplot(modo1,'x',MarkerSize=12,LineWidth=4)
subplot(1,2,2)
plot(real(modo1)),yline(0,'r'), grid on,
```



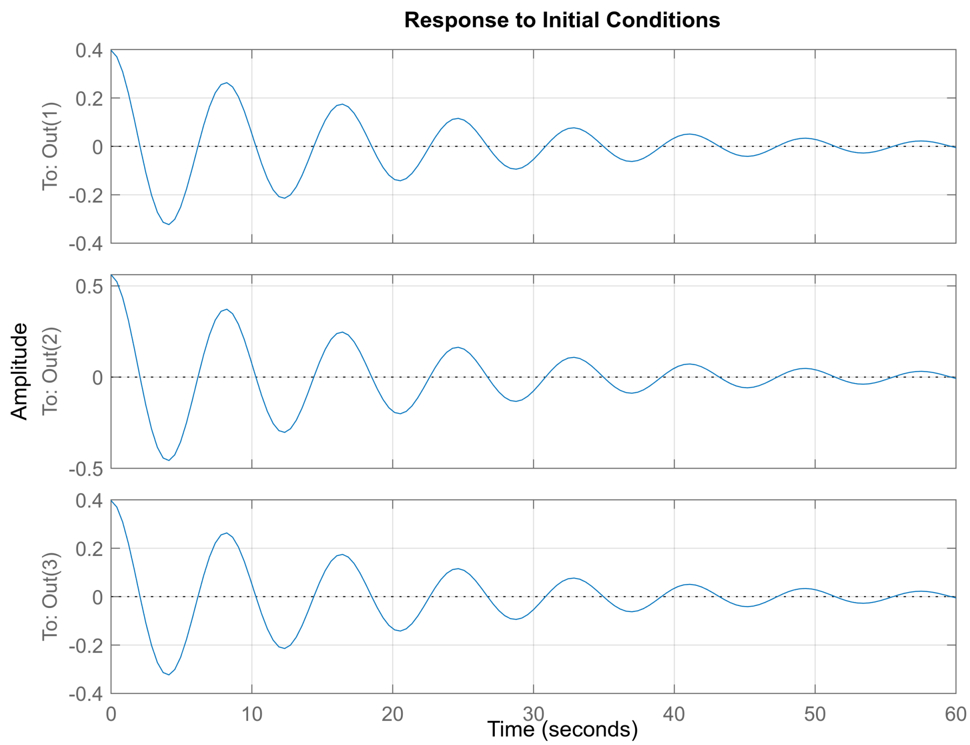


Veamos una respuesta

```
figure()
x0=real(V(:,5))
```

```
x0 = 6×1
    0.3971
   -0.0199
    0.5615
   -0.0281
    0.3971
   -0.0199
```

```
initial(sys,x0,60), grid on
```

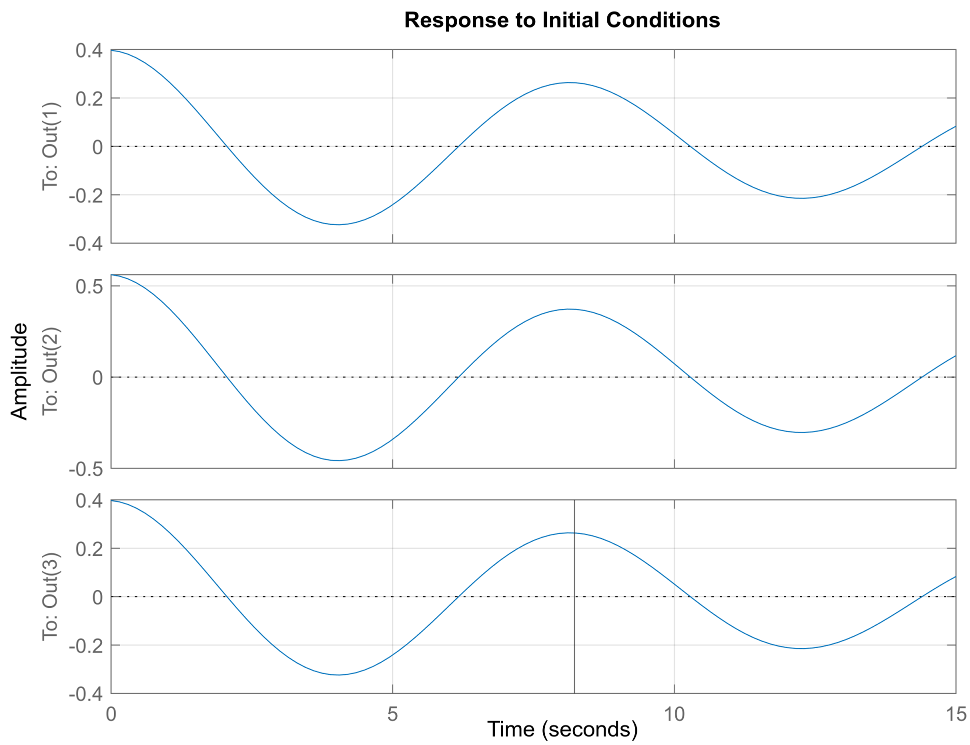


El período de oscilación debería ser:

```
prd(1)
```

```
ans = 8.2270
```

```
initial(sys,x0,15), grid on, xline(prd(1))
```



Análisis del modo 2

```
figure()
autovalor_modo=DD(3)
```

```
autovalor_modo = -0.0500 - 1.4133i
```

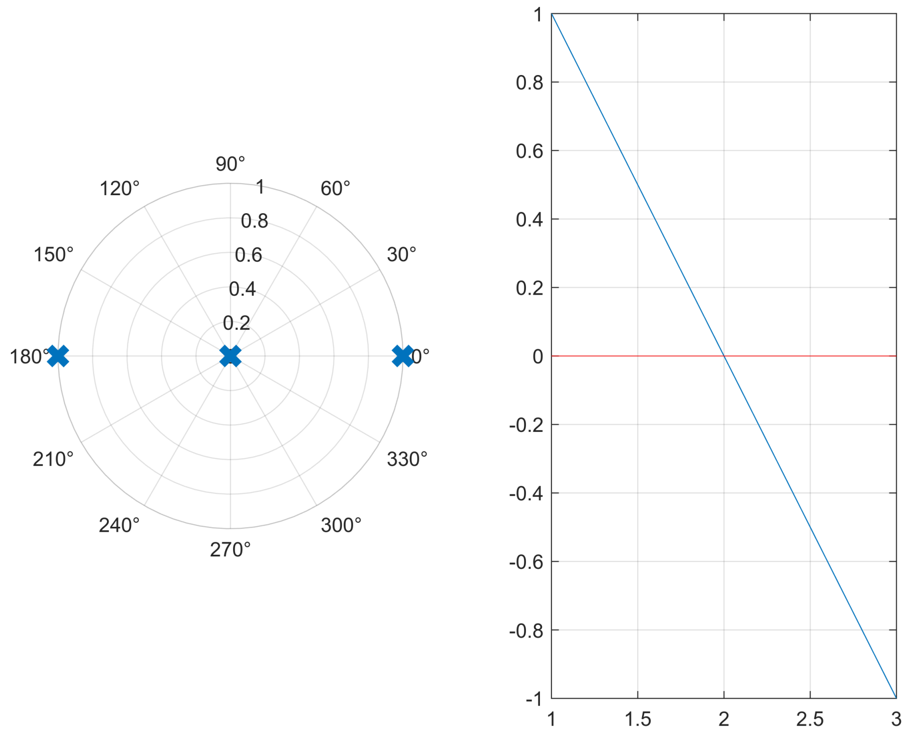
```
modo2=V([1 3 5],3) %sólo posición
```

```
modo2 = 3×1 complex
  -0.0144 - 0.4080i
  -0.0000 + 0.0000i
   0.0144 + 0.4080i
```

```
modo2=modo2/modo2(1)
```

```
modo2 = 3×1 complex
   1.0000 + 0.0000i
  -0.0000 - 0.0000i
  -1.0000 + 0.0000i
```

```
subplot(1,2,1)
polarplot(modo2,'x',MarkerSize=12,LineWidth=4)
subplot(1,2,2)
plot(real(modo2)),yline(0,'r'), grid on
```

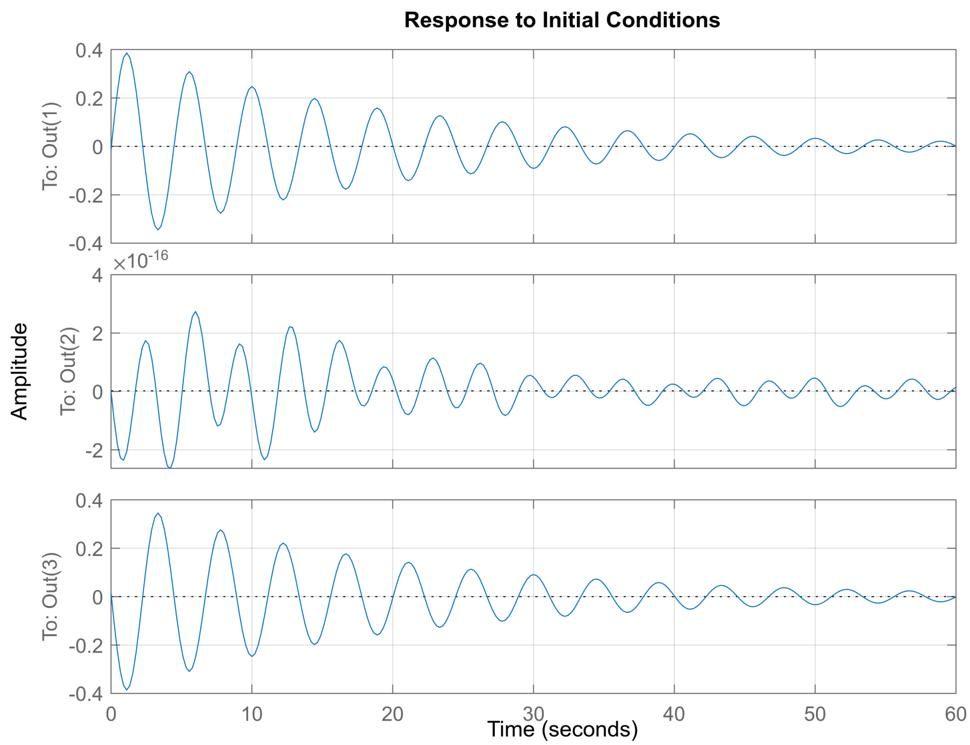


Veamos una respuesta

```
figure()
x0=real(V(:,3))
```

```
x0 = 6×1
   -0.0144
    0.5774
   -0.0000
   -0.0000
    0.0144
   -0.5774
```

```
initial(sys,x0,60), grid on
```

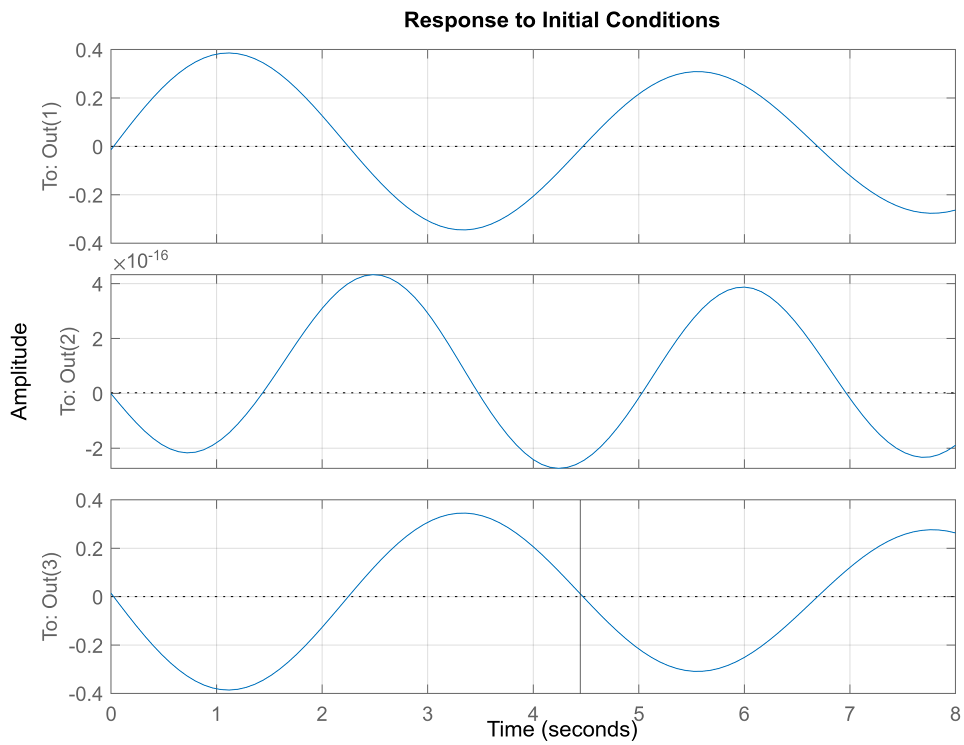


El período de oscilación debería ser:

```
prd(2)
```

```
ans = 4.4457
```

```
initial(sys,x0,8), grid on, xline(prd(2))
```



Análisis del modo 3

```
figure()
autovalor_modo=DD(1)
```

```
autovalor_modo = -0.0500 - 1.8471i
```

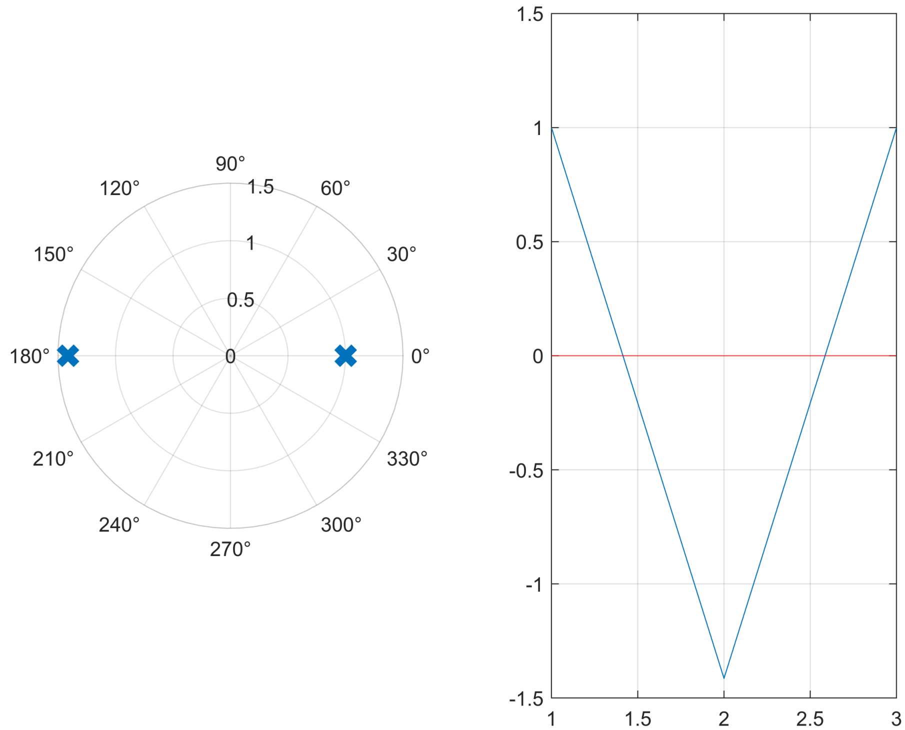
```
modo3=V([1 3 5],1) %sólo posición
```

```
modo3 = 3×1 complex
   0.0064 + 0.2379i
  -0.0091 - 0.3364i
   0.0064 + 0.2379i
```

```
modo3=modo3/modo3(1)
```

```
modo3 = 3×1 complex
   1.0000 + 0.0000i
  -1.4142 - 0.0000i
   1.0000 + 0.0000i
```

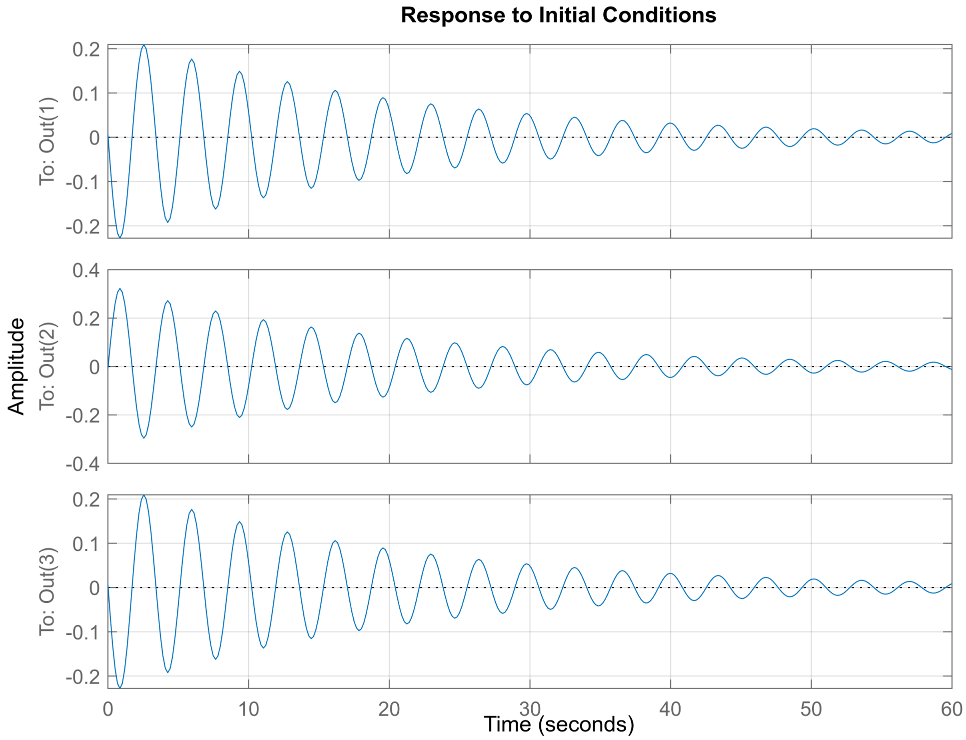
```
subplot(1,2,1)
polarplot(modo3,'x',MarkerSize=12,LineWidth=4)
subplot(1,2,2)
plot(real(modo3)),yline(0,'r'), grid on
```




```
figure()
x0=real(V(:,1))
```

```
x0 = 6×1
    0.0064
   -0.4397
   -0.0091
    0.6219
    0.0064
   -0.4397
```

```
initial(sys,x0,60), grid on
```

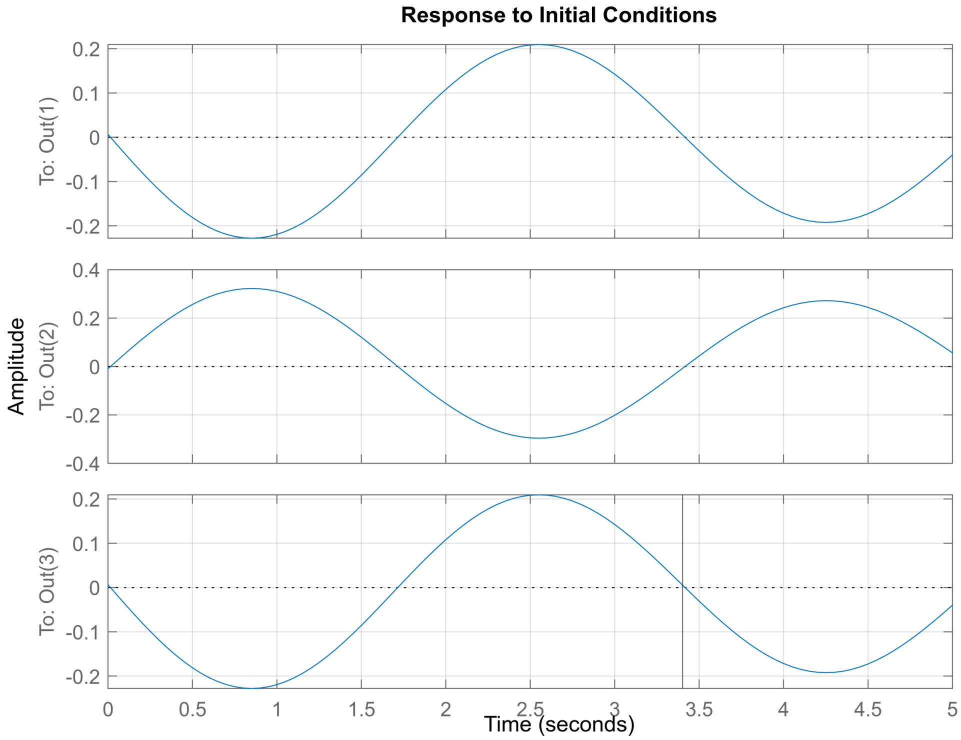


El período de oscilación debería ser:

```
prd(3)
```

```
ans = 3.4017
```

```
initial(sys,x0,5), grid on, xline(prd(3))
```


Response to Initial Conditions
Amplitude
To: Out(1)
To: Out(2)
To: Out(3)
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Time (seconds)