

Respuesta circuito RCR ante pulso senoidal

© 2023, Antonio Sala Piqueras, Universitat Politècnica de València. Todos los derechos reservados.

Presentaciones en vídeo:

--- <http://personales.upv.es/asala/YT/V/sinpulL.html>

--- <http://personales.upv.es/asala/YT/V/sinpulRCR.html>

--- <http://personales.upv.es/asala/YT/V/sinpulRCR2.html>

Este código funcionó sin errores en Matlab R2022b (Linux)

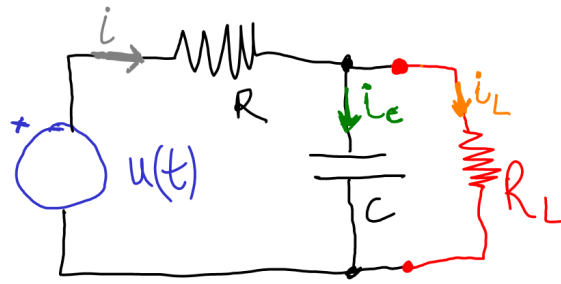
Objetivo: analizar y calcular la transformada de Laplace de un pulso (un semiperíodo) de forma senoidal, para su posible uso en problemas de respuesta temporal o/y rectificadores.

Calcular la respuesta de un sistema con resistencias y condensadores ante ese pulso senoidal.

Tabla de Contenidos

Modelado (repr. interna y FdT).....	1
Análisis de la entrada tipo pulso senoidal y transf. Laplace.....	3
Entrada en dominio del tiempo.....	3
Entrada en dominio de Laplace.....	4
Cálculo con superposición y retardo (recomendado).....	4
Cálculo directo de la definición de la transformada de Laplace (no recomendado)....	6
Respuesta temporal, método 1 (superposición).....	7
Sin usar $U(s)$, sólo con la salida ante senoide , C.I. nulas.....	7
Respuesta ante CI no nulas.....	9
Respuesta temporal, método 2: resolución por tramos.....	10

Modelado (repr. interna y FdT)



En circuito RCR de la figura tiene de ecuaciones:

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C} i_c, \quad i_c = i - i_L, \quad i = \frac{1}{R}(u - V_c), \quad i_L = \frac{1}{R_L} V_c$$

Son 4 ecuaciones y 4 "incógnitas": V_c , i , i_c , i_L por lo que el modelo está completo.

La representación interna con salida V_c será:

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R}(u - V_c) - \frac{1}{R_L} V_c \right)$$

o sea, ecuaciones de estado y salida:

$$\frac{dV_c}{dt} = -\left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{R_L C}\right) \cdot V_c + \frac{1}{RC} u$$

$$y = V_c$$

*El problema se "inspira" en un filtro capacitivo en un rectificador, pero no es el modelo del mismo, porque con diodos la intensidad i no puede ser negativa, o sea que $i = \max\left(0, \frac{1}{R}(u - V_c)\right)$, no lineal.

Demos valores a parámetros físicos constantes:

```
R=0.5; RL=20; C=2e-2;
A=-1/(R*C)-1/(RL*C); B=1/(R*C); C=1; D=0;
```

En el dominio de Laplace, el modelo será, usando

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D) \cdot U(s) + C(sI - A)^{-1} \cdot x(0)$$

```
syms s
FdT=simplifyFraction(C*1/(s-A)*B+D)
```

FdT =

$$\frac{200}{2s + 205}$$

```
TCI=simplifyFraction(C*1/(s-A)) %lo que multiplica a V_c(0)
```

TCI =

$$\frac{2}{2s + 205}$$

```
t_est_98=log(0.02)/A %duración transitorio (tiempo establecimiento) criterio "98% disipación"
```

```
t_est_98 = 0.0382
```

Análisis de la entrada tipo pulso senoidal y transf. Laplace

Entrada en dominio del tiempo

La entrada "pulso senoidal" (un semiperíodo π/ω) es

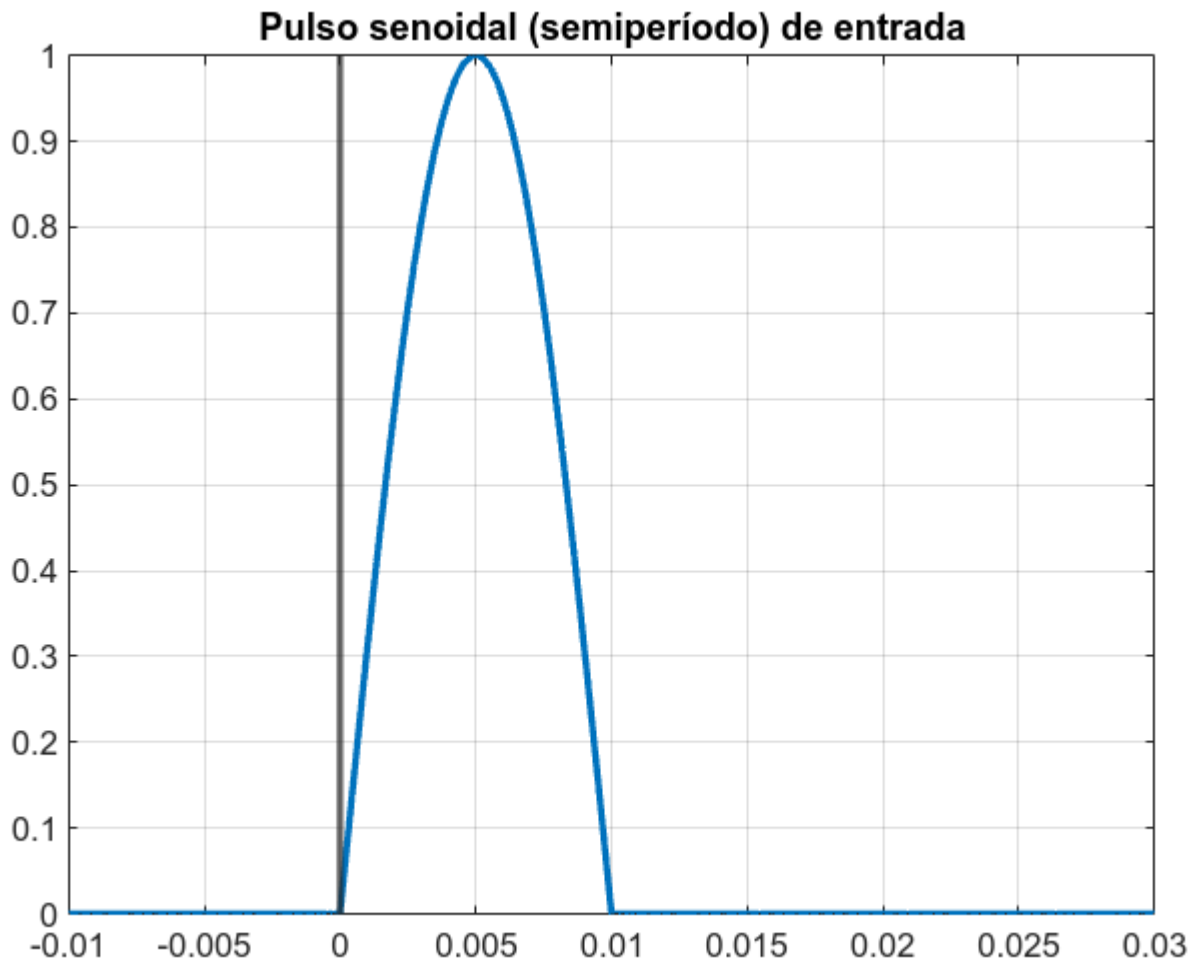
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin(\omega t) & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & t > \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

Por ejemplo, para sentar las bases de futuros ejemplos de "rectificadores", trabajaremos con un segmento (semiperíodo) de onda de 50 Hz de corriente alterna.

```
omega=100*pi; %la onda de 50 Hz.  
SemiPeriod=pi/omega
```

```
SemiPeriod = 0.0100
```

```
syms t real  
u(t)= heaviside(t)*heaviside(SemiPeriod-t)*sin(omega*t);  
fplot(u,[-0.01 0.03],LineWidth=2), grid on, title("Pulso senoidal (semiperíodo) de entrada")
```



Entrada en dominio de Laplace

Matlab sabe su transformada de Laplace:

```
laplace(u)
```

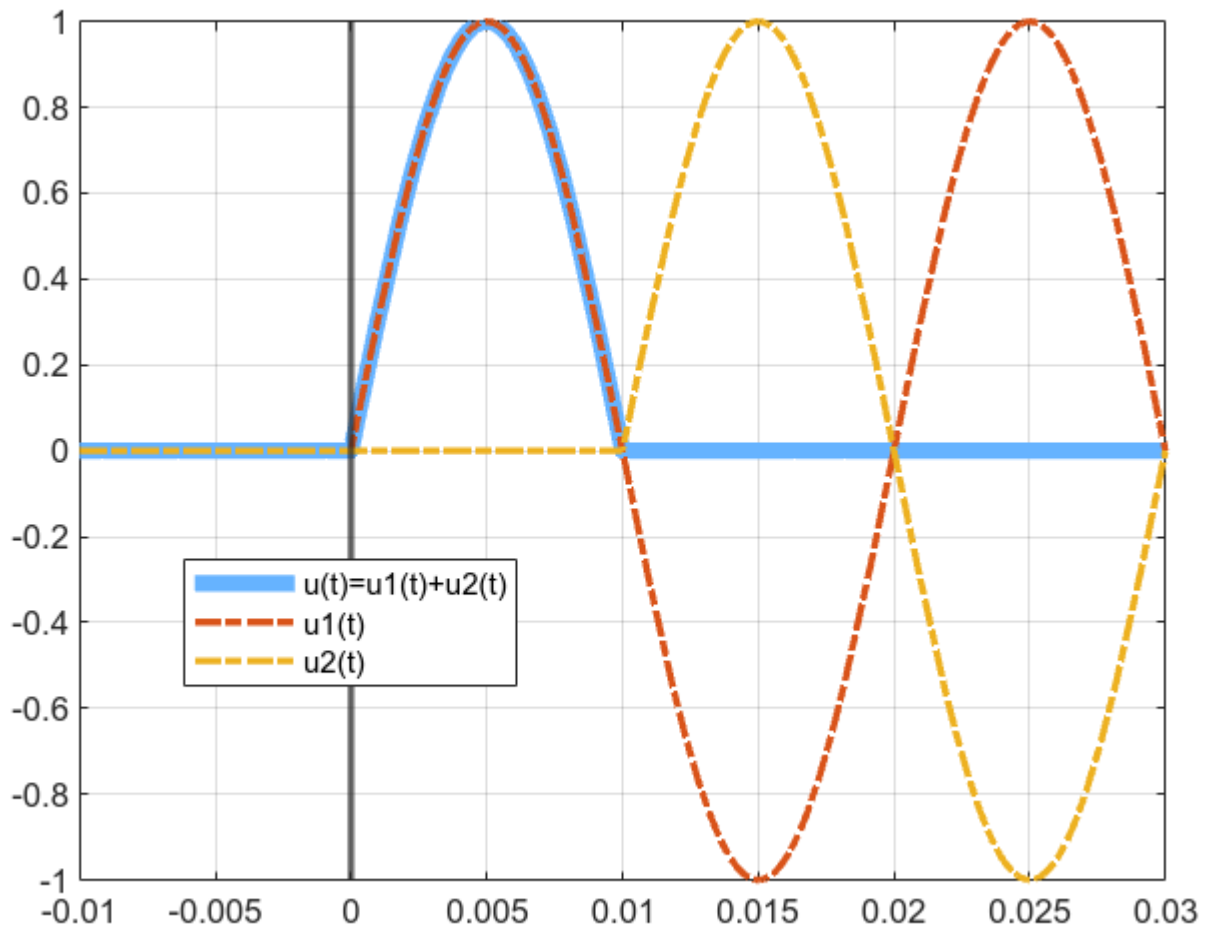
ans =

$$\frac{100\pi \left(e^{-\frac{s}{100}} + 1 \right)}{s^2 + 10000\pi^2}$$

Cálculo con superposición y retardo (recomendado)

La podemos calcular viendo que $u(t)$ es la suma de

```
u1(t)=heaviside(t)*sin(omega*t); %seno a partir de t>=0
u2(t)=subs(u1(t),t,t-SemiPeriod); %seno retrasado, a partir de t>=0.01
fplot(u1+u2,[-0.01 0.03],LineWidth=5,Color=[.4 .7 1]), hold on
fplot([u1,u2],[-0.01 0.03],LineStyle='-.',LineWidth=2), grid on, hold off, xline(0,Line
legend("u(t)=u1(t)+u2(t)", "u1(t)", "u2(t)", Location="best")
```



```
U1s=laplace(u1) %un seno, de tablas omega/(s^2+omega^2)
```

U1s =

$$\frac{100 \pi}{s^2 + 10000 \pi^2}$$

```
U2s=laplace(u2) %retrasado, multiplicar por exp(-d*s) el seno en tablas
```

U2s =

$$\frac{100 \pi e^{-\frac{s}{100}}}{s^2 + 10000 \pi^2}$$

La suma produce el mismo resultado que "laplace" de arriba, obviamente.

NOTA: aunque hemos calculado $u(s)$ porque es una pregunta "típica" en exámenes de Transformada de Laplace, al haber estimado que la entrada es una superposición de señales sencillas (retrasadas), NO es necesario utilizar $U(s)$ en el cálculo de

la salida, dado que por linealidad e invarianza temporal, la salida ante este pulso senoidal se podrá calcular a partir de la salida antes senoide "completa hasta infinito" superponiendola con su versión retrasada igual que la entrada (detalles luego).

Cálculo directo de la definición de la transformada de Laplace (no recomendado)

$$U(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{0.01} \sin(100\pi \cdot t) \cdot e^{-st} dt$$

Integrando por partes:

$$U(s) = \int_0^{0.01} \sin(100\pi \cdot t) \cdot e^{-st} dt = e^{-st} \cdot \left(-\frac{\cos(100\pi t)}{100\pi}\right) \Big|_0^{0.01} - \int_0^{0.01} -\frac{\cos(100\pi \cdot t)}{100\pi} \cdot (-se^{-st}) dt$$

la segunda expresión:

$$V(s) = \int_0^{0.01} \cos(100\pi \cdot t) \cdot e^{-st} dt = e^{-st} \frac{\sin(100\pi t)}{100\pi} \Big|_0^{0.01} - \int_0^{0.01} \frac{\sin(100\pi \cdot t)}{100\pi} \cdot (-se^{-st}) dt = 0 + \frac{1}{100\pi}$$

O sea, que

$$U(s) = \frac{1}{100\pi} \cdot (1 + e^{-0.01s}) - \frac{s^2}{100^2\pi^2} U(s)$$

con lo que, multiplicando ambos lados por $(100\pi)^2$

$$(100\pi)^2 U(s) = 100\pi \cdot (1 + e^{-0.01s}) - s^2 U(s)$$

$$U(s) = \frac{100\pi \cdot (1 + e^{-0.01s})}{s^2 + (100\pi)^2}$$

Resulta lo mismo.

Matlab (Symbolic Toolbox) también sabe integrar por partes:

```
syms s
int(sin(omega*t)*exp(-s*t), t, 0, SemiPeriod)
```

ans =

$$\frac{100\pi \left(e^{-\frac{s}{100}} + 1\right)}{s^2 + 10000\pi^2}$$

Respuesta temporal, método 1 (superposición)

Sin usar $U(s)$, sólo con la salida ante senoide $U_1(s)$, C.I. nulas

```
Y1=FdT*U1s
```

```
Y1 =
```

$$\frac{20000 \pi}{(2s + 205)(s^2 + 10000 \pi^2)}$$

```
partfrac(Y1,FactorMode='real')
```

```
ans =
```

$$\frac{164000 \pi}{1600 \pi^2 + 1681} - \frac{1600 \pi s}{1600 \pi^2 + 1681} + \frac{3200 \pi}{(2s + 205)(1600 \pi^2 + 1681)}$$

```
vpa(partfrac(Y1,FactorMode='real'),5)
```

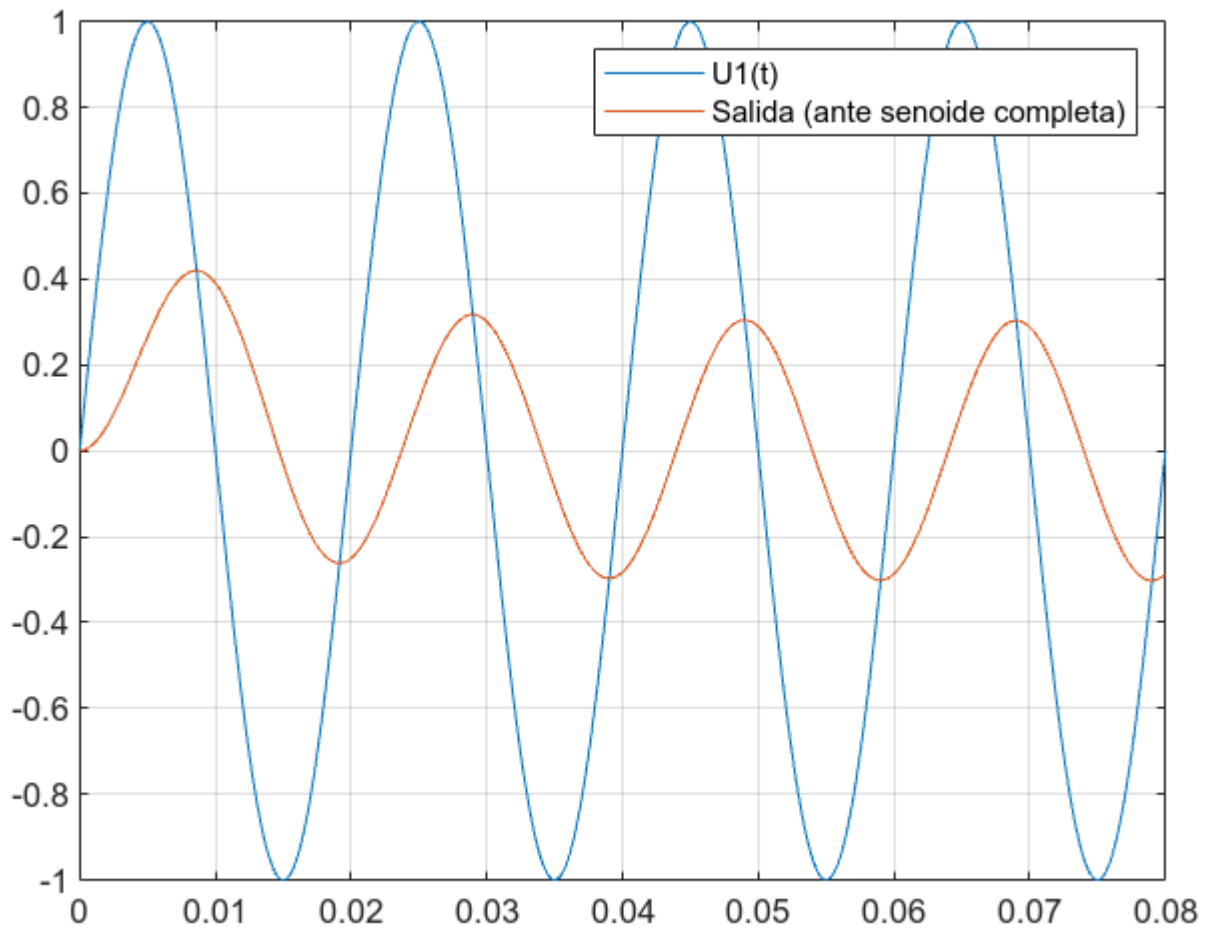
```
ans =
```

$$\frac{0.57537}{2.0s + 205.0} - \frac{0.28769s - 29.488}{s^2 + 98696.0}$$

```
Y1_t=vpa(ilaplace(Y1),5)
```

$$Y1_t = 0.093862 \sin(314.16 t) - 0.28769 \cos(314.16 t) + 0.28769 e^{-102.5 t}$$

```
fplot([u1;Y1_t],[0 0.08]), grid on, legend("U1(t)","Salida (ante senoide completa)")
```



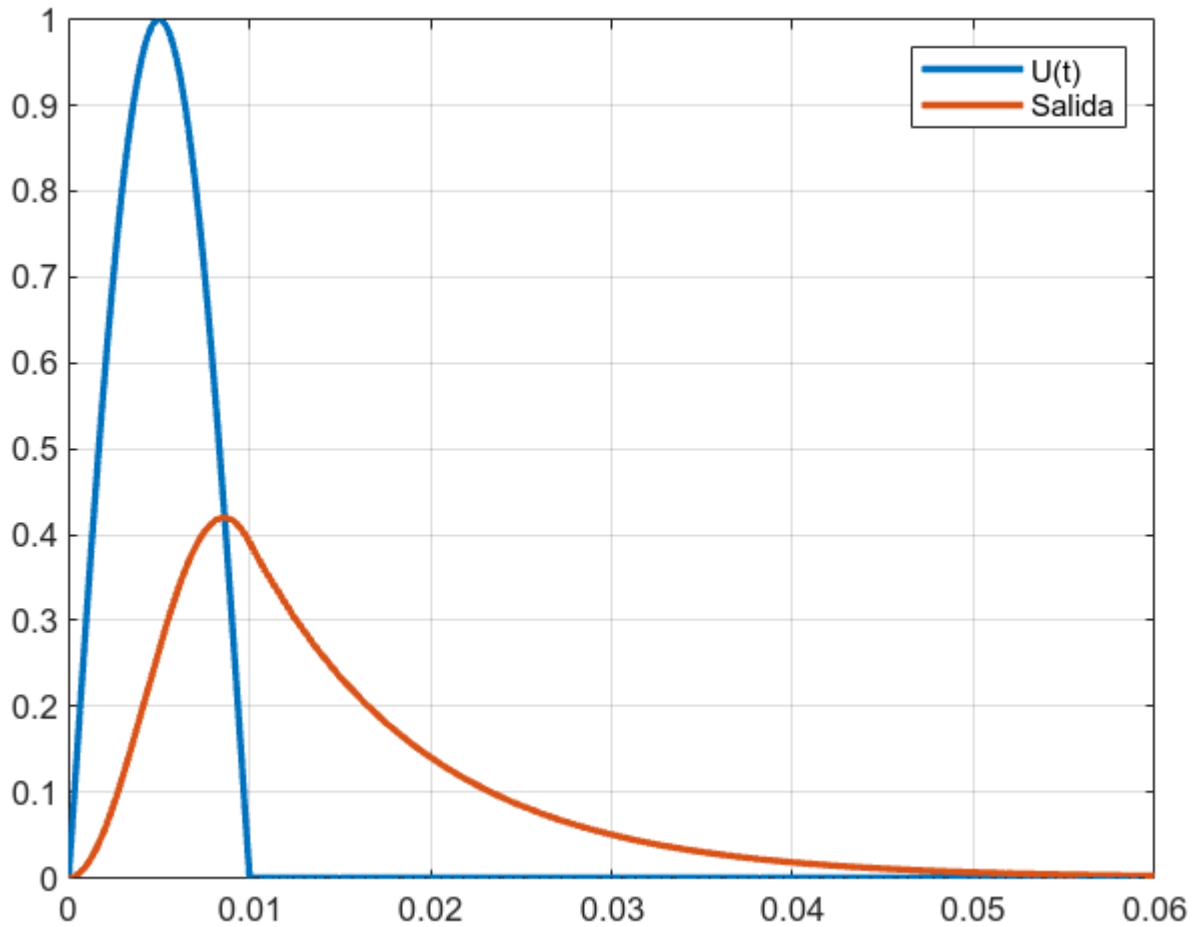
Con y_1 , como la salida ante u_2 (que es u_1 retrasada) será y_1 retrasada, la salida ante el pulso senoidal será:

$$y(t) = y_1(t) + \begin{cases} 0 & t < 0.01 \\ y_1(t - 0.01) & t \geq 0.01 \end{cases}$$

```
Y_t_pulso=Y1_t+subs(heaviside(t)*Y1_t,t,t-0.01);
vpa(Y_t_pulso,4)
```

```
ans = 0.09386 sin(314.2 t) - 0.2877 cos(314.2 t) + 0.2877 e-102.5 t + heaviside(1.0 t - 0.01) (0.2877 e1.025 - 102.5 t .
```

```
fplot([u;Y_t_pulso],[0 0.06],LineWidth=2), grid on, legend("U(t)", "Salida")
```



Respuesta ante CI no nulas

Suponemos condensador inicialmente cargado

$$V_0 = 0.95;$$

Podemos usar lo anterior (forzada), porque por superposición, añadimos la respuesta libre y problema terminado:

$$\text{resp_libre_Laplace} = \text{TCI} \cdot V_0$$

$$\text{resp_libre_Laplace} =$$

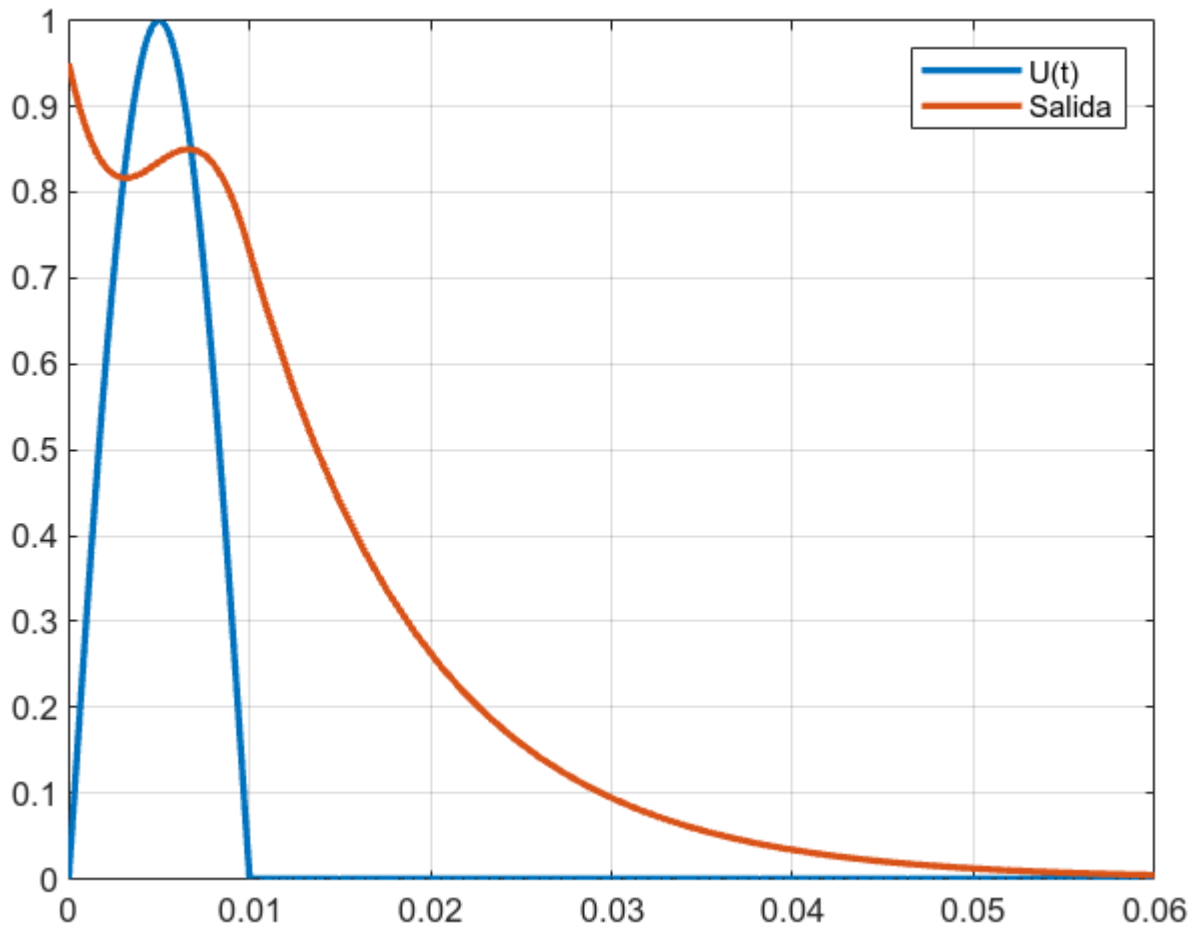
$$\frac{19}{10(2s + 205)}$$

$$\text{resp_libre_t} = \text{ilaplace}(\text{resp_libre_Laplace})$$

$$\text{resp_libre_t} =$$

$$\frac{19e^{-\frac{205t}{2}}}{20}$$

```
Y_t_conCI=Y_t_pulso+resp_libre_t;
fplot([u;Y_t_conCI],[0 0.06],LineWidth=2), grid on,legend("U(t)","Salida")
```



Respuesta temporal, método 2: resolución por tramos

Calculando la respuesta ante la senoide completa, y CI dadas, durante el primer semiperíodo será idéntica a la que buscamos (los sistemas "causales" no pueden depender de "futuras" diferencias en la entrada):

```
Y1=FdT*U1s+TCI*V0; %respuesta completa Laplace con CI no nulas
vpa(partfrac(Y1,FactorMode='real'),5)
```

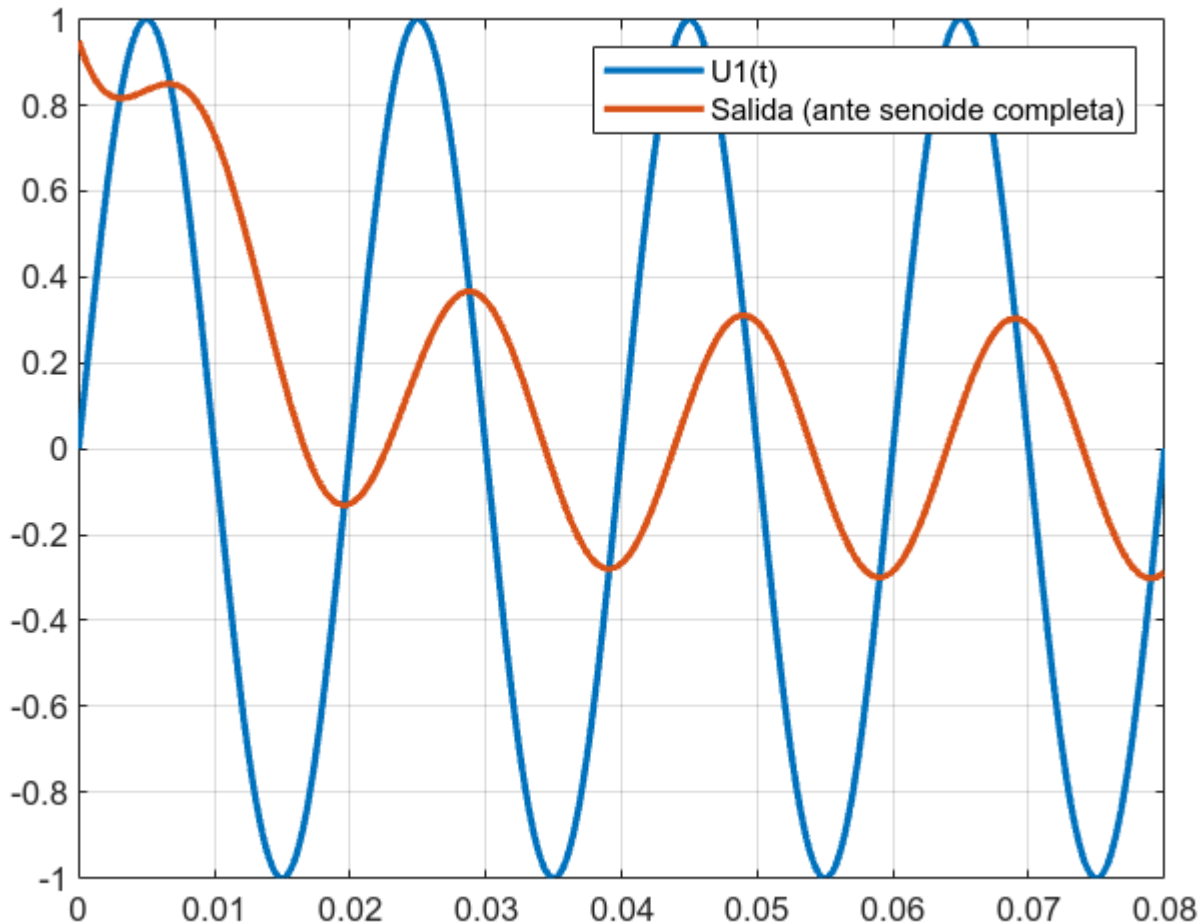
ans =

$$\frac{2.4754}{2.0s + 205.0} - \frac{0.28769s - 29.488}{s^2 + 98696.0}$$

```
Y1_t(t)=ilaplace(Y1); vpa(Y1_t,4)
```

```
ans(t) = 0.09386 sin(314.2 t) - 0.2877 cos(314.2 t) + 1.238 e-102.5 t
```

```
fplot([u1;Y1_t],[0 0.08],LineWidth=2), grid on, legend("U1(t)","Salida (ante senoide completa)
```



Como la entrada senoidal cambia de fórmula en $t = 0.01$, pasa a ser cero, significa que la solución anterior es solamente válida en los primeros 0.01 segundos. Luego será la respuesta ante entrada "cero" y condiciones iniciales "las que se haya quedado la solución anterior":

```
CondIniTrozo2=vpa(Y1_t(0.01),6)
```

```
CondIniTrozo2 = 0.731763
```

Obviamente, si el sistema a simular fuera de orden >1 , necesitaríamos calcular la salida y cierto número de derivadas de ella en $t=0.01$, o bien el estado del sistema si el modelo fuera en espacio de estados. Aquí no es necesario.

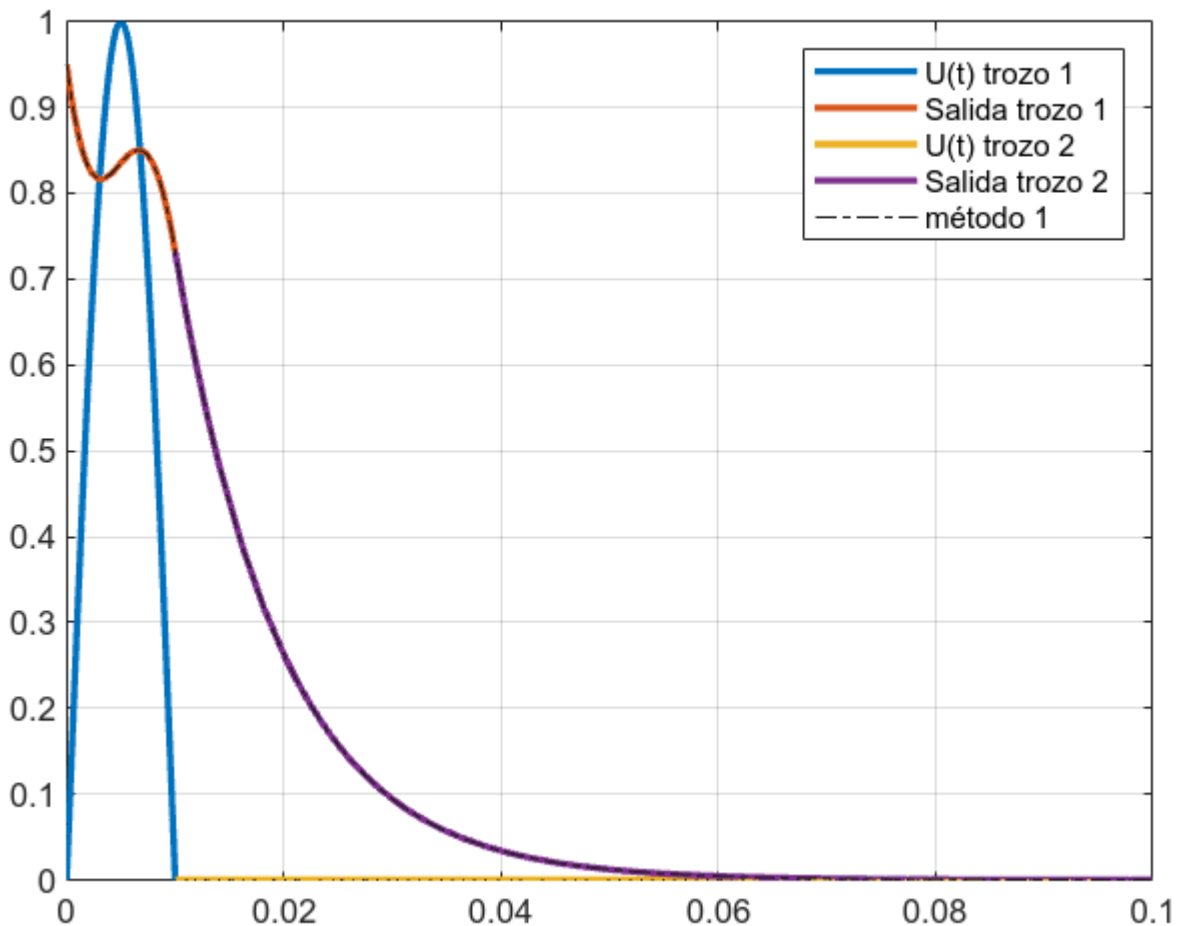
La respuesta ante cond. iniciales = finales del trozo anterior es:

```
syms t_new %nuevo "reloj" que empieza en cero cuando "t" vale 0.01
Y_t_trozo2(t_new)=ilaplace(TCI*CondIniTrozo2,t_new); vpa(Y_t_trozo2,5)
```

$\text{ans}(t_{\text{new}}) = 0.73176e^{-102.5t_{\text{new}}}$

Pero, "ojo", realmente el "cero" de este cronómetro es el 0.01 del cronómetro "oficial"; dibujaremos con:

```
fplot([u1;Y1_t],[0 0.01],LineWidth=2), hold on
fplot([0;Y_t_trozo2(t-0.01)],[0.01 0.1],LineWidth=2),
fplot(Y_t_conCI,[0 0.1], Color=[.1 .1 .1],LineStyle="-.") %solución método 1
hold off, grid on
legend("U(t) trozo 1","Salida trozo 1","U(t) trozo 2","Salida trozo 2","método 1")
```



Observamos que, como era de esperar, las soluciones de ambos métodos coinciden.