

Respuesta circuito RCR ante tren de pulsos senoidales (señal seno rectificada)

© 2023, Antonio Sala Piqueras, Universitat Politècnica de València. Todos los derechos reservados.

Presentación en vídeo: <http://personales.upv.es/asala/YT/V/trenpulRCR.html>

*Este código funcionó sin errores en Matlab R2022b (Linux)

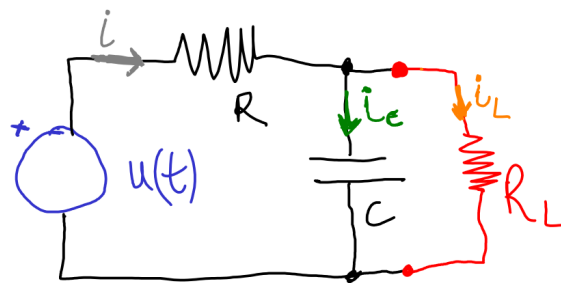
Objetivo: analizar y calcular la transformada de Laplace de un pulso (un semiperíodo) de forma senoidal, para su posible uso en problemas de respuesta temporal o/y rectificadores.

Calcular la respuesta de un sistema con resistencias y condensadores ante un tren de pulsos senoidales.

Tabla de Contenidos

Modelado (repr. interna y FdT).....	1
Análisis de la entrada tipo pulso senoidal y transf. Laplace.....	2
Entrada en dominio del tiempo.....	2
Entrada "único pulso" en dominio de Laplace.....	4
Tren de pulsos.....	4
Respuesta temporal ante PULSO senoidal único, CI Nulas.....	7
Sin usar , sólo con la salida ante senoide	7
Respuesta ante CI no nulas.....	9
Respuesta "completa" ante tren de pulsos.....	10
Régimen estacionario ante tren de pulsos senoidales.....	13

Modelado (repr. interna y FdT)



En circuito RCR de la figura tiene de ecuaciones:

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C} i_c, \quad i_c = i - i_L, \quad i = \frac{1}{R}(u - V_c), \quad i_L = \frac{1}{R_L} V_c$$

Son 4 ecuaciones y 4 "incógnitas": V_c , i , i_c , i_L por lo que el modelo está completo.

La representación interna con salida V_c será:

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} (u - V_c) - \frac{1}{R_L} V_c \right)$$

o sea, ecuaciones de estado y salida:

$$\frac{dV_c}{dt} = - \left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{R_L C} \right) \cdot V_c + \frac{1}{RC} u$$
$$y = V_c$$

*El problema se "inspira" en un filtro capacitivo en un rectificador, pero no es el modelo del mismo, porque con diodos la intensidad i no puede ser negativa, o sea que $i = \max \left(0, \frac{1}{R} (u - V_c) \right)$, no lineal.

Demos valores a parámetros físicos constantes:

```
R=0.5; RL=20; C=2e-2;  
A=-1/(R*C)-1/(RL*C); B=1/(R*C); C=1; D=0;
```

En el dominio de Laplace, el modelo será, usando

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D) \cdot U(s) + C(sI - A)^{-1} \cdot x(0)$$

```
syms s  
FdT=simplifyFraction(C*1/(s-A)*B+D)
```

```
FdT =  

$$\frac{200}{2s + 205}$$

```

```
TCI=simplifyFraction(C*1/(s-A)) %lo que multiplica a V_c(0)
```

```
TCI =  

$$\frac{2}{2s + 205}$$

```

```
t_est_98=log(0.02)/A %duración transitorio (tiempo establecimiento)  
criterio "98% disipado"
```

```
t_est_98 = 0.0382
```

Análisis de la entrada tipo pulso senoidal y transf. Laplace

Entrada en dominio del tiempo

La entrada "pulso senoidal" (un semiperíodo π/ω) es

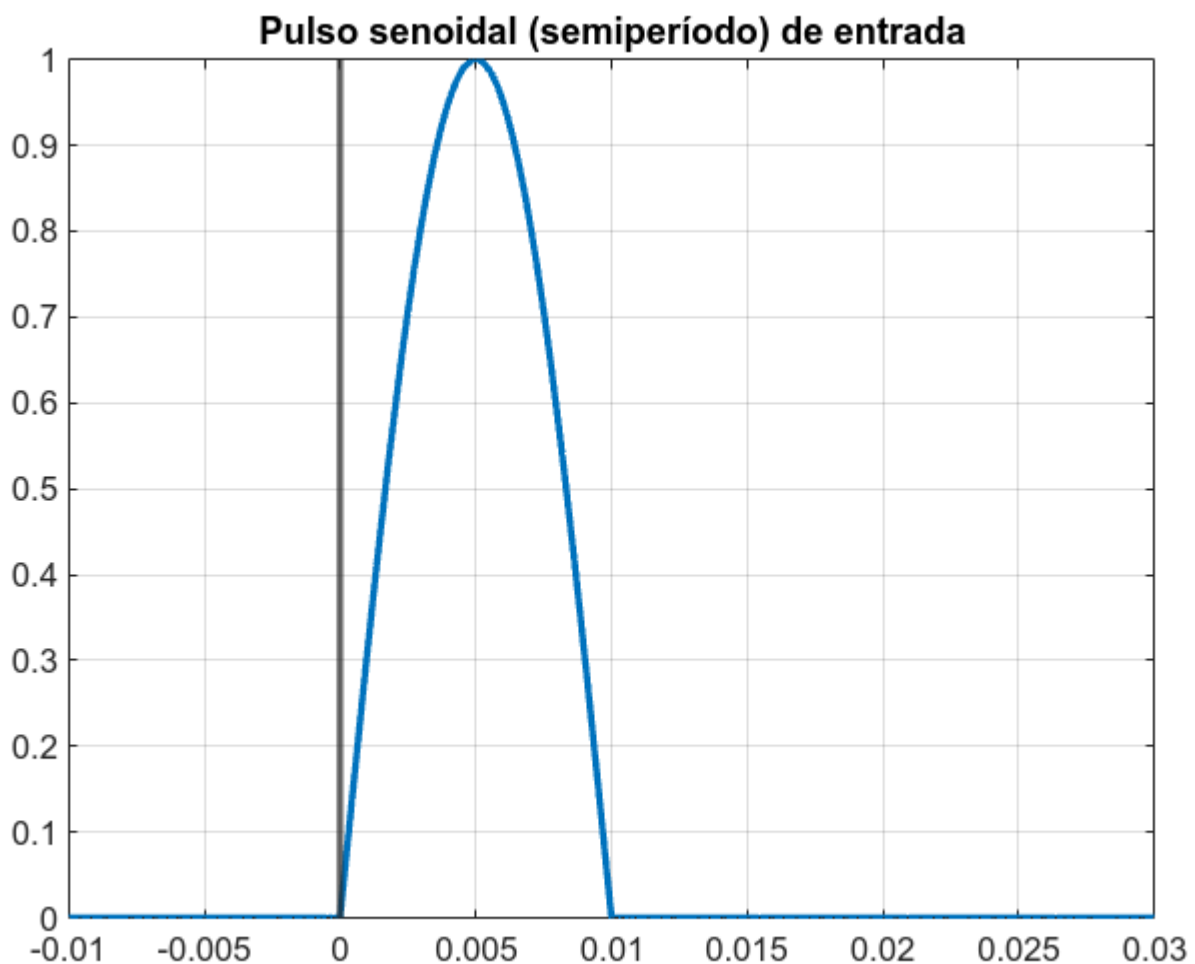
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin(\omega t) & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & t > \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

Por ejemplo, trabajaremos con un segmento (semiperíodo) de onda de **50 Hz** de corriente alterna.

```
omega=100*pi; %la onda de 50 Hz.  
SemiPeriod=pi/omega
```

```
SemiPeriod = 0.0100
```

```
syms t real  
u(t)= heaviside(t)*heaviside(SemiPeriod-t)*sin(omega*t);  
fplot(u,[-0.01 0.03],LineWidth=2), grid on, title("Pulso senoidal  
(semiperíodo) de entrada"),xline(0,LineWidth=2)
```



Entrada "único pulso" en dominio de Laplace

Matlab sabe su transformada de Laplace:

```
Pulso(s)=laplace(u)
```

Pulso(s) =

$$\frac{100 \pi \left(e^{-\frac{s}{100}} + 1 \right)}{s^2 + 10000 \pi^2}$$

Tren de pulsos

Si el pulso se repite con un período T , entonces

$$Tren_{pulsos}(t) = pulso(t) + pulso(t - T) + pulso(t - 2T) + \dots$$

Si $U(s)$ es la transformada de Laplace de un único pulso, el tren completo tendrá:

$$Tren_{pulsos}(s) = U(s) \cdot (1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots) = U(s) \frac{1}{1 - e^{-Ts}}.$$

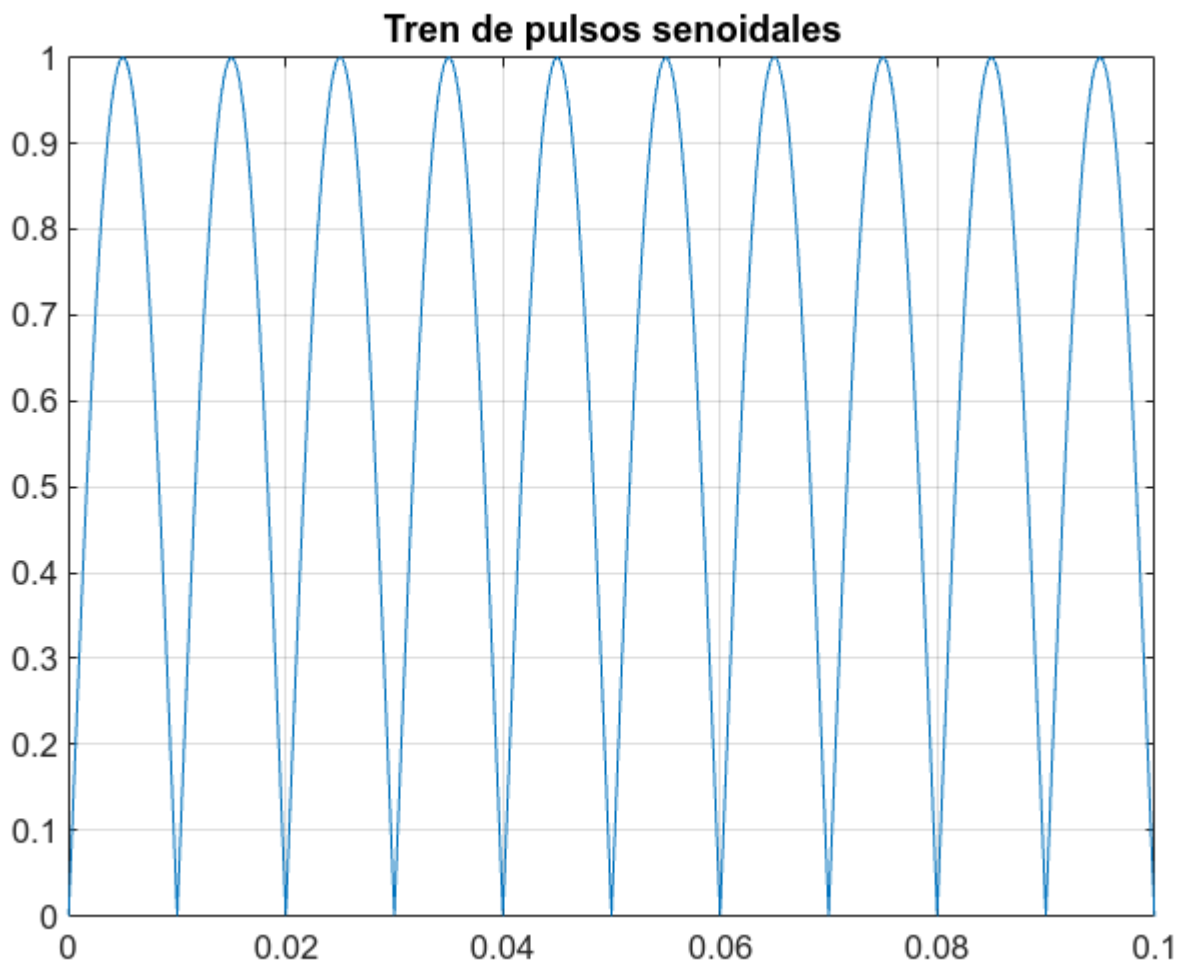
Hemos usado la fórmula de suma de una progresión geométrica $1/(1 - r)$, con razón $r = e^{-Ts}$.

```
Tren(s)=Pulso(s)/(1-exp(-1/100*s))
```

Tren(s) =

$$-\frac{100 \pi \left(e^{-\frac{s}{100}} + 1 \right)}{(s^2 + 10000 \pi^2) \left(e^{-\frac{s}{100}} - 1 \right)}$$

```
fplot(ilaplace(Tren),[0 0.1]), grid on, title("Tren de pulsos senoidales")
```



La respuesta del sistema ante ese tren de pulsos, con condiciones iniciales nulas, será:

```
coco=simplify(ilaplace(FdT*Tren),400)
```

coco =

$$-20000 \pi \left(\frac{\sigma_4 \left(\sigma_2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \left(\left(\frac{\partial}{\partial s} [s] \right) \Big|_{s=-100 t} \right) - \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 \left(\left(\frac{\partial}{\partial s} [s] \right) \Big|_{s=-100 t} \right) + 1 \right)}{50 \sigma_7} + \frac{41 \sigma_5 (\sigma_1 -}{1000 \pi \sigma}$$

where

$$\sigma_1 = (-1)^{\lfloor -100 t \rfloor}$$

$$\sigma_2 = e^{200 \pi t i}$$

$$\sigma_3 = e^{-\frac{41 \lfloor -100 t \rfloor}{40}}$$

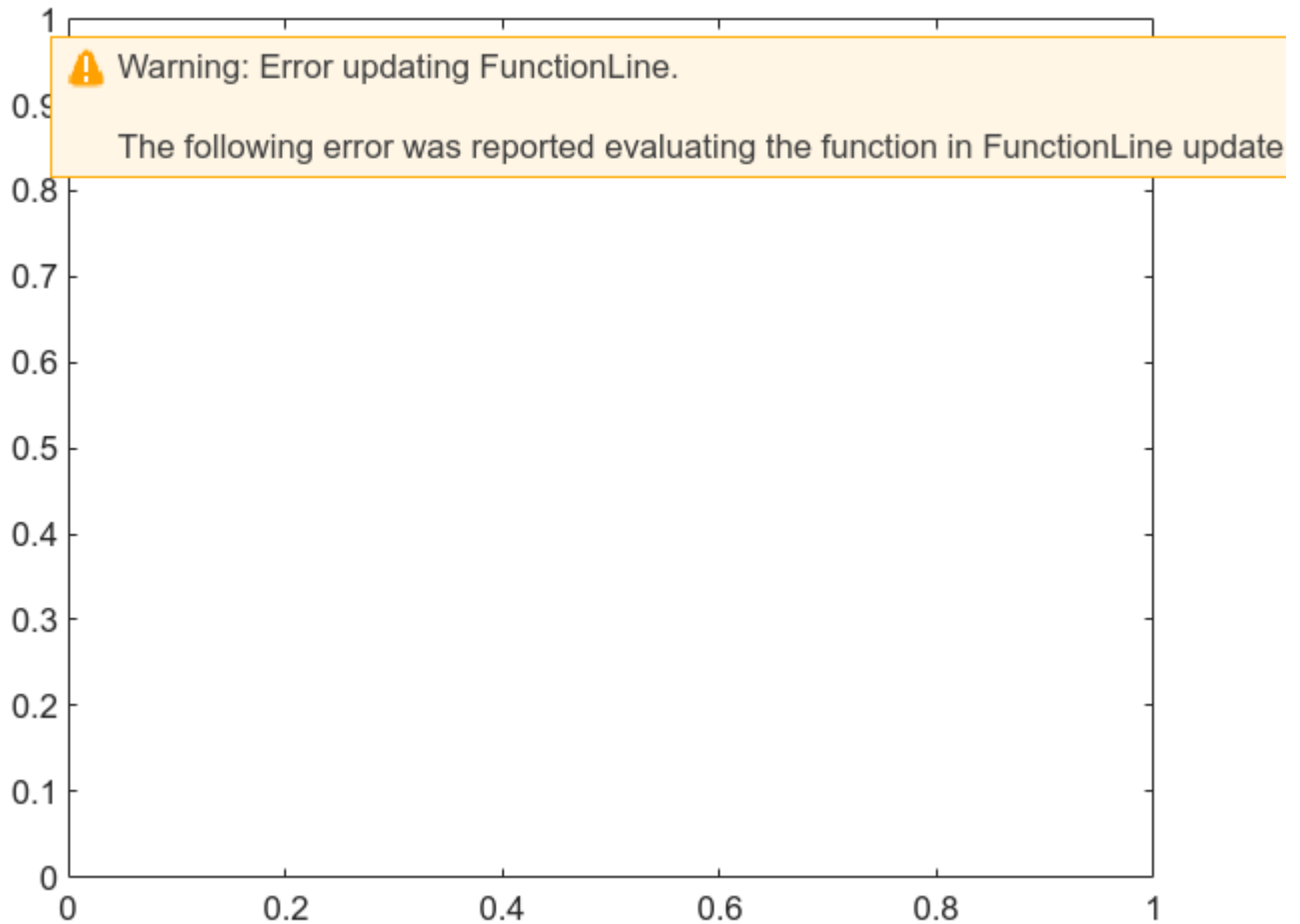
$$\sigma_4 = e^{-100 \pi t i}$$

$$\sigma_5 = \sin(100 \pi t)$$

$$\sigma_6 = 25 \sigma_7 (e^{41/40} - 1)$$

$$\sigma_7 = 1600 \pi^2 + 1681$$

```
fplot(coco,[0 0.1]) %Matlab se "raya" mucho...
```



Respuesta temporal ante PULSO senoidal único, CI Nulas

Sin usar $U(s)$, sólo con la salida ante senoide $U_1(s)$

```
u1=sin(100*pi*t);
U1s=laplace(u1)
```

U1s =

$$\frac{100 \pi}{s^2 + 10000 \pi^2}$$

```
Y1=FdT*U1s
```

Y1 =

$$\frac{20000 \pi}{(2 s + 205) (s^2 + 10000 \pi^2)}$$

```
vpa(partfrac(Y1,FactorMode='real'),5)
```

ans =

$$\frac{0.57537}{2.0s + 205.0} - \frac{0.28769s - 29.488}{s^2 + 98696.0}$$

```
Y1_t(t)=ilaplace(Y1);
vpa(Y1_t,5)
```

```
ans(t) = 0.093862 sin(314.16 t) - 0.28769 cos(314.16 t) + 0.28769 e-102.5 t
```

```
fplot([u1;Y1_t],[0 0.08]), grid on, legend("U1(t)", "Salida (ante senoide completa)")
```

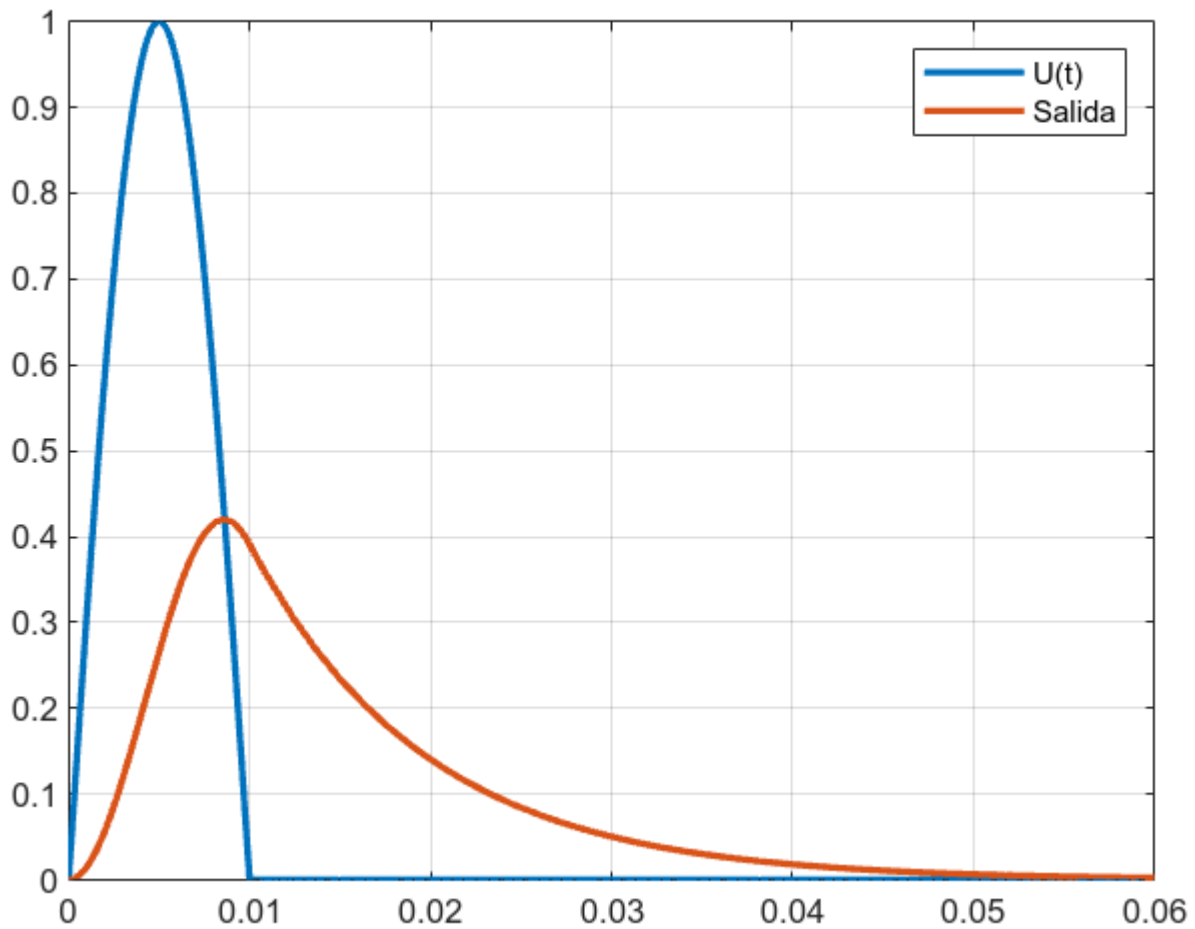
Con y1, como la salida ante u2 (que es u1 retrasada) será y1 retrasada, la salida ante el pulso senoidal será:

$$y(t) = y_1(t) + \begin{cases} 0 & t < 0.01 \\ y_1(t - 0.01) & t \geq 0.01 \end{cases}$$

```
Y_t_pulso(t)=Y1_t+subs(heaviside(t)*Y1_t,t,t-0.01);
vpa(Y_t_pulso(t),3)
```

```
ans = 0.0939 sin(314.0 t) - 0.288 cos(314.0 t) + 0.288 e-102.0 t + heaviside(1.0 t - 0.01) (0.288 e1.02-102.0 t - 0.28
```

```
fplot([u;Y_t_pulso],[0 0.06],LineWidth=2), grid on, legend("U(t)", "Salida")
```



Respuesta ante CI no nulas

Suponemos condensador inicialmente cargado

$$V_0 = 0.95;$$

Podemos usar lo anterior (forzada), porque por superposición, añadimos la respuesta libre y problema terminado:

$$\text{resp_libre_Laplace} = TCI \cdot V_0$$

$$\text{resp_libre_Laplace} =$$

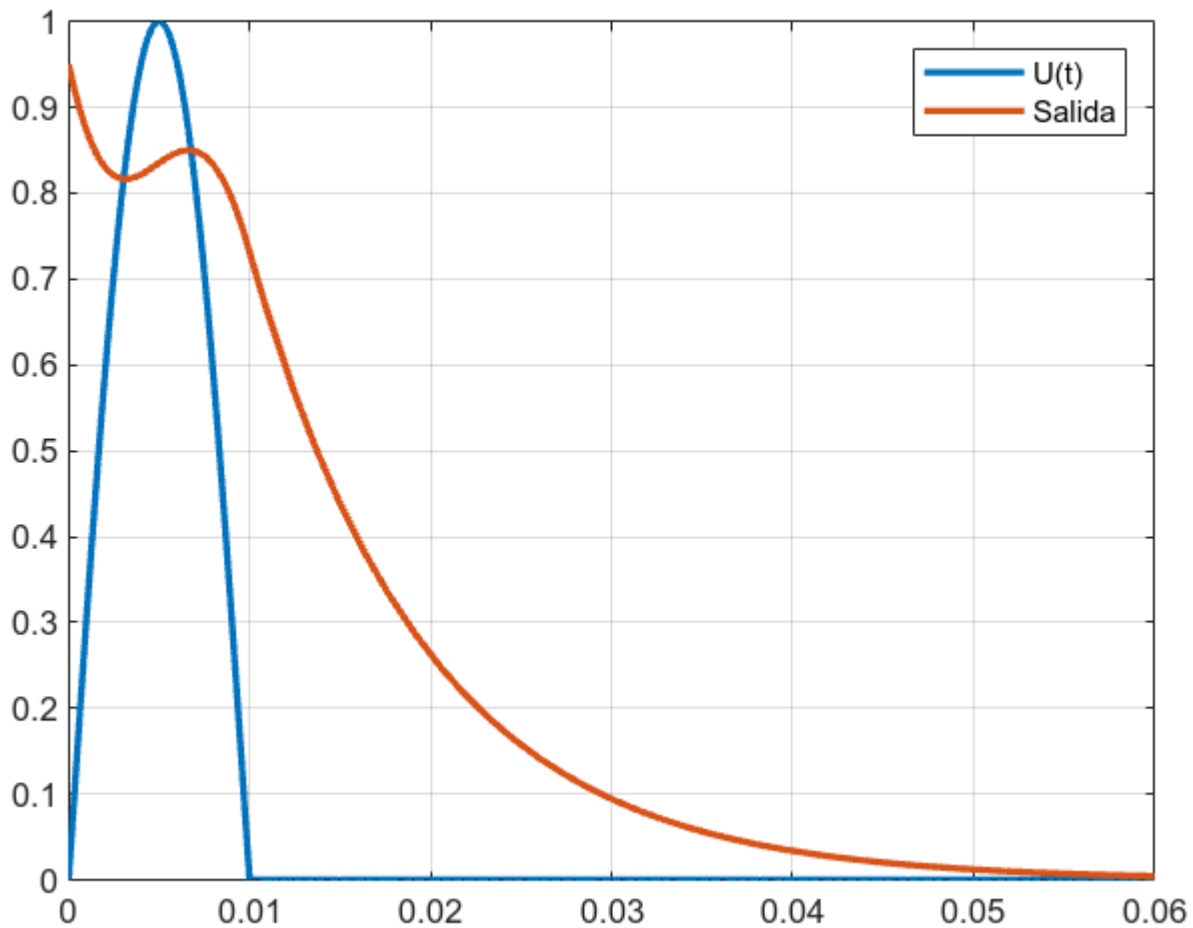
$$\frac{19}{10(2s + 205)}$$

$$\text{resp_libre_t} = \text{ilaplace}(\text{resp_libre_Laplace})$$

$$\text{resp_libre_t} =$$

$$\frac{19 e^{-\frac{205 t}{2}}}{20}$$

```
Y_t_conCI=Y_t_pulso+resp_libre_t;
fplot([u;Y_t_conCI],[0 0.06],LineWidth=2), grid on, legend("U(t)", "Salida")
```



Al final, será esta exponencial por la condición inicial lo que hay que añadir:

```
cosaCI=ilaplace(TCI)
```

cosaCI =

$$e^{-\frac{205t}{2}}$$

Respuesta "completa" ante tren de pulsos

Se haría a trozos... Viendo en qué condición acaba "cada pulso" y repitiendo cálculos para el siguiente pulso en las CI en las que se quedara.

Causalidad: como el pulso coincide con el "seno" en los primeros 0.01 segundos, las respuestas en ese intervalo serán idénticas. Trabajaremos con la respuesta Y1_t ante el seno y no con la respuesta

ante el pulso completo [en el vídeo que explica este material se gasta Y_t _pulso, pero el resultado es idéntico y más sencillo con $Y1_t$].

Por ejemplo, con $CI = 0$ (inicial de verdad en $t = 0$):

```
Ytrozo1(t)=Y1_t(t); vpa(Ytrozo1(t),4) %Y1_t es la resp. ante sin(100*pi*t) y condiciones iniciales nulas.
```

```
ans = 0.09386 sin(314.2 t) - 0.2877 cos(314.2 t) + 0.2877 e-102.5 t
```

```
V1=Ytrozo1(0.01); vpa(V1,4)
```

```
ans = 0.3909
```

Si la CI fuera la "final" del trozo 1:

```
Ytrozo2(t)=Y1_t(t)+V1*cosaCI; vpa(Ytrozo2(t),4)
```

```
ans = 0.09386 sin(314.2 t) - 0.2877 cos(314.2 t) + 0.6786 e-102.5 t
```

```
V2=Ytrozo2(0.01); vpa(V2,4)
```

```
ans = 0.5312
```

Si la CI fuera la "final" del trozo 2:

```
Ytrozo3(t)=Y1_t(t)+V2*cosaCI;  
V3=Ytrozo3(0.01); vpa(V3,4)
```

```
ans = 0.5815
```

```
Ytrozo4(t)=Y1_t(t)+V3*cosaCI;  
V4=Ytrozo4(0.01); vpa(V4,4)
```

```
ans = 0.5995
```

```
Ytrozo5(t)=Y1_t(t)+V4*cosaCI;  
V5=Ytrozo5(0.01); vpa(V5,4)
```

```
ans = 0.606
```

```
Ytrozo6(t)=Y1_t(t)+V5*cosaCI;  
V6=Ytrozo6(0.01); vpa(V6,4)
```

```
ans = 0.6083
```

```
Ytrozo7(t)=Y1_t(t)+V6*cosaCI;  
V7=Ytrozo7(0.01); vpa(V7,4)
```

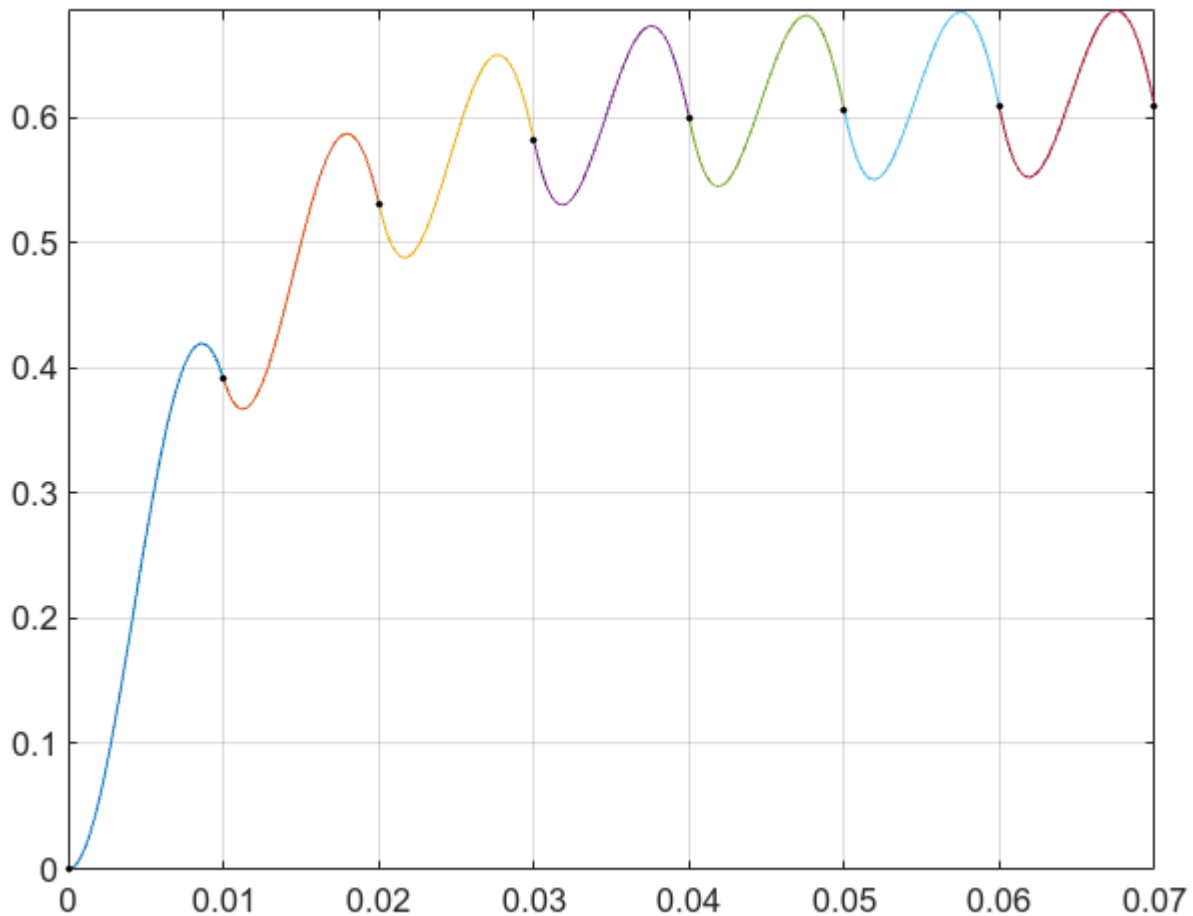
```
ans = 0.6092
```

```
Ytrozo8(t)=Y1_t(t)+V7*cosaCI;
V8=Ytrozo8(0.01); vpa(V8,4) %realmente, un bucle "for" parecería una opción
más inteligente: copiar-pegar es "herejía" en programación.
```

```
ans = 0.6095
```

Esto parece que "converge" a un régimen estacionario (no senoidal), que discutiremos abajo.

```
fplot(Ytrozo1(t),[0 0.01]), grid on, hold on
fplot(Ytrozo2(t-.01),[0.01 0.02]),
fplot(Ytrozo3(t-.02),[0.02 0.03]),
fplot(Ytrozo4(t-.03),[0.03 0.04]),
fplot(Ytrozo5(t-.04),[0.04 0.05]),
fplot(Ytrozo6(t-.05),[0.05 0.06]),
fplot(Ytrozo7(t-.06),[0.06 0.07]),
plot(0:0.01:0.07,[0 V1 V2 V3 V4 V5 V6 V7],'.k')
hold off
```



Régimen estacionario ante tren de pulsos senoidales

Debe acabar en la misma tensión que empezó el ciclo.

Si empezamos en V_0 , entonces

```
syms V_0 real
Yperm(t)=Y1_t(t)+ilaplace(TCI*V_0); %válido el primer período.
vpa(Yperm(0),4)
```

```
ans = V_0
```

```
vpa(Yperm(0.01),4)
```

```
ans = 0.3588 V_0 + 0.3909
```

```
sol=solve(Yperm(0.01)==Yperm(0))
```

```
sol =
```

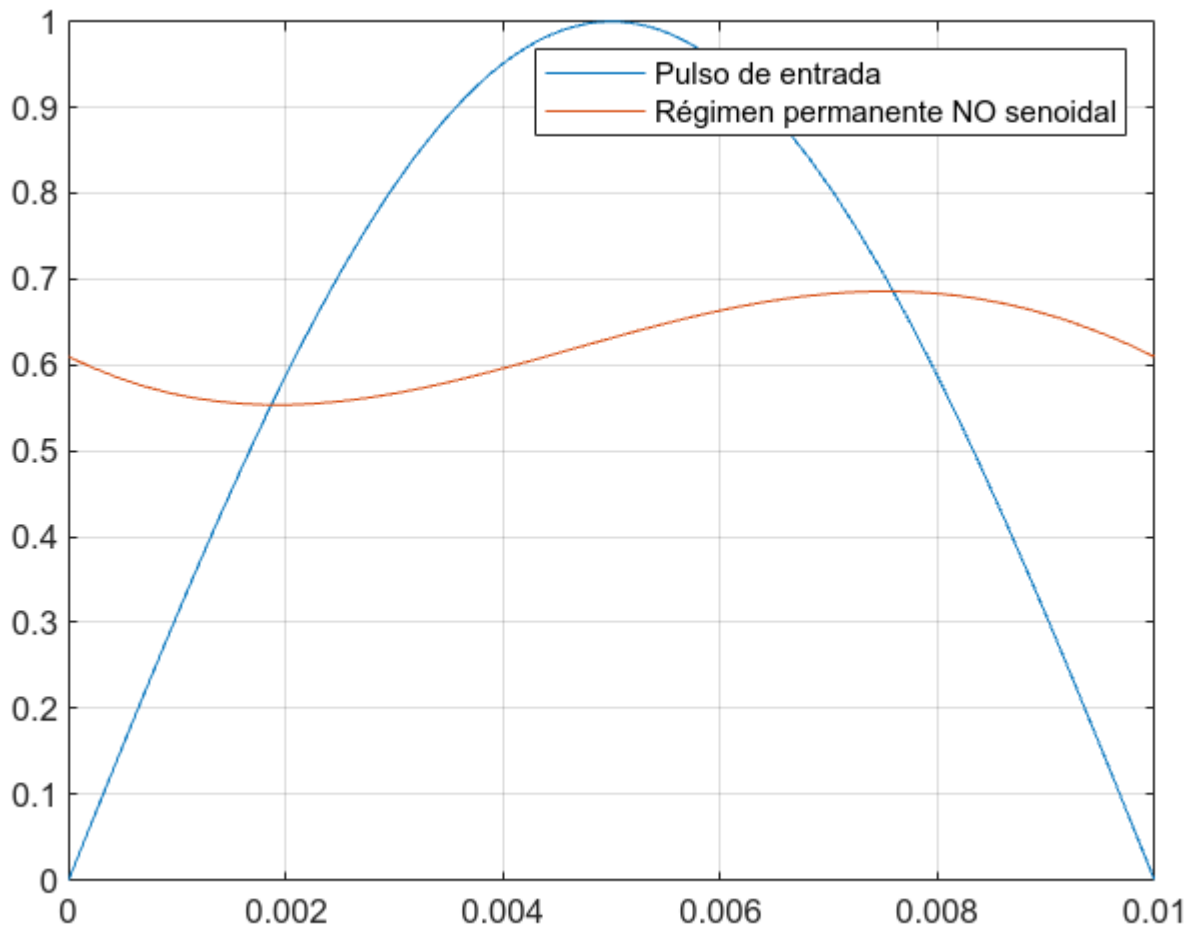
$$\frac{1600\pi + 1600\pi e^{41/40}}{1681e^{41/40} + 1600\pi^2 e^{41/40} - 1600\pi^2 - 1681}$$

Pues esa es la condición inicial:

```
Yfinal(t)=subs(Yperm(t),V_0,sol);
vpa(Yfinal,4)
```

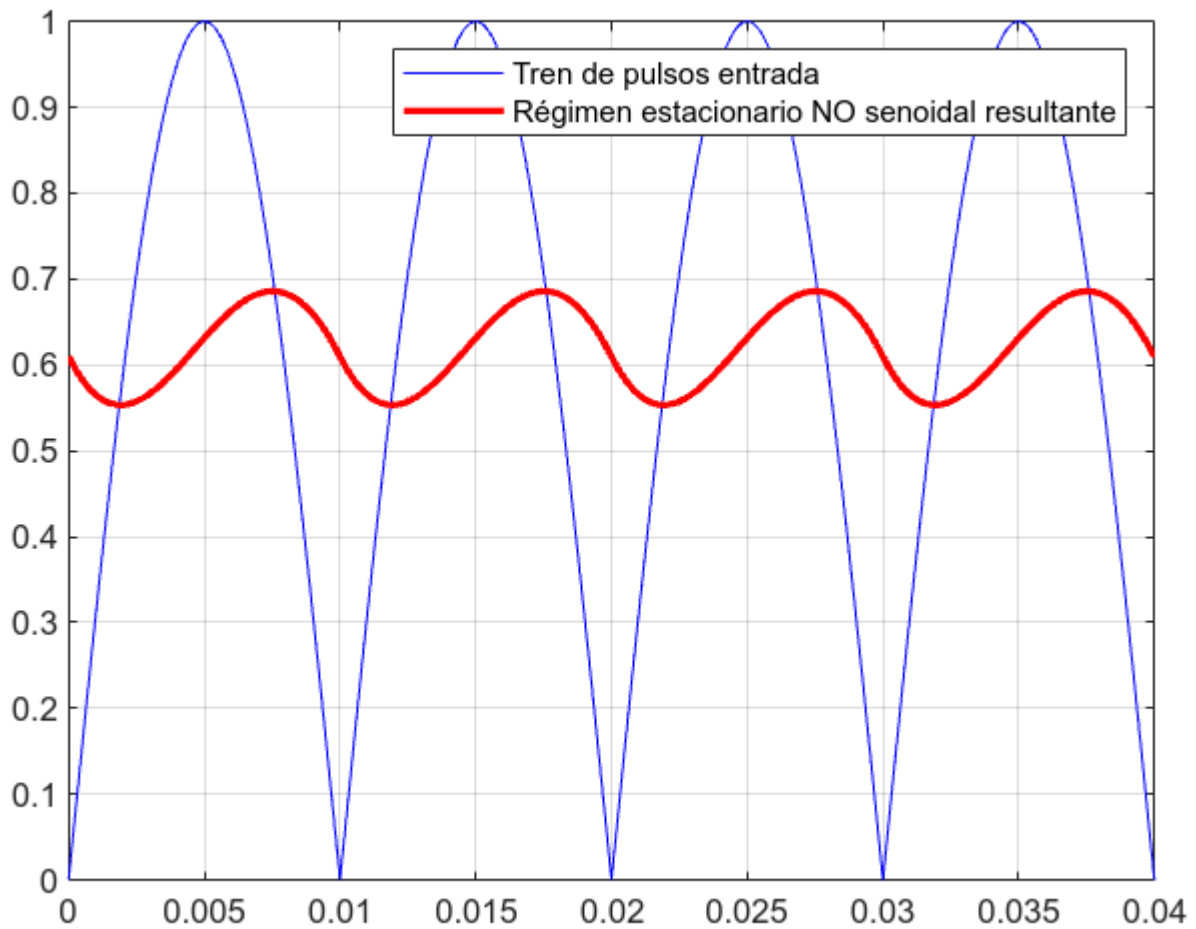
$$\text{ans}(t) = 0.09386 \sin(314.2 t) - 0.2877 \cos(314.2 t) + 0.8973 e^{-102.5 t}$$

```
fplot([u; Yfinal],[0 0.01]), grid on, legend("Pulso de entrada","Régimen
permanente NO senoidal")
```



Eso se repetiría "ad infinitum"... Tendríamos un régimen estacionario periódico no-senoidal.

```
fplot(u,[0 0.01],Color="blue"), grid on
hold on
fplot(Yfinal,[0 0.01],LineWidth=2,Color="red"), grid on
fplot(u(t-0.01),[0.01 0.02],Color="blue"), grid on
fplot(u(t-0.02),[0.02 0.03],Color="blue"), grid on
fplot(u(t-0.03),[0.03 0.04],Color="blue"), grid on
fplot(Yfinal(t-0.01),[0.01 0.02],LineWidth=2,Color="red"), grid on
fplot(Yfinal(t-0.02),[0.02 0.03],LineWidth=2,Color="red"), grid on
fplot(Yfinal(t-0.03),[0.03 0.04],LineWidth=2,Color="red"), grid on
hold off, legend("Tren de pulsos entrada", "Régimen estacionario NO senoidal
resultante")
```



***Nota:** esta NO sería la forma de onda de tensión de salida a la resistencia de "carga" R_L en un rectificador, porque la intensidad absorbida por la fuente no puede ser negativa si tiene diodos (y aquí sí que lo será cuando $V_c > u$). Sigue siendo, por tanto, un "ejercicio académico" por el momento.